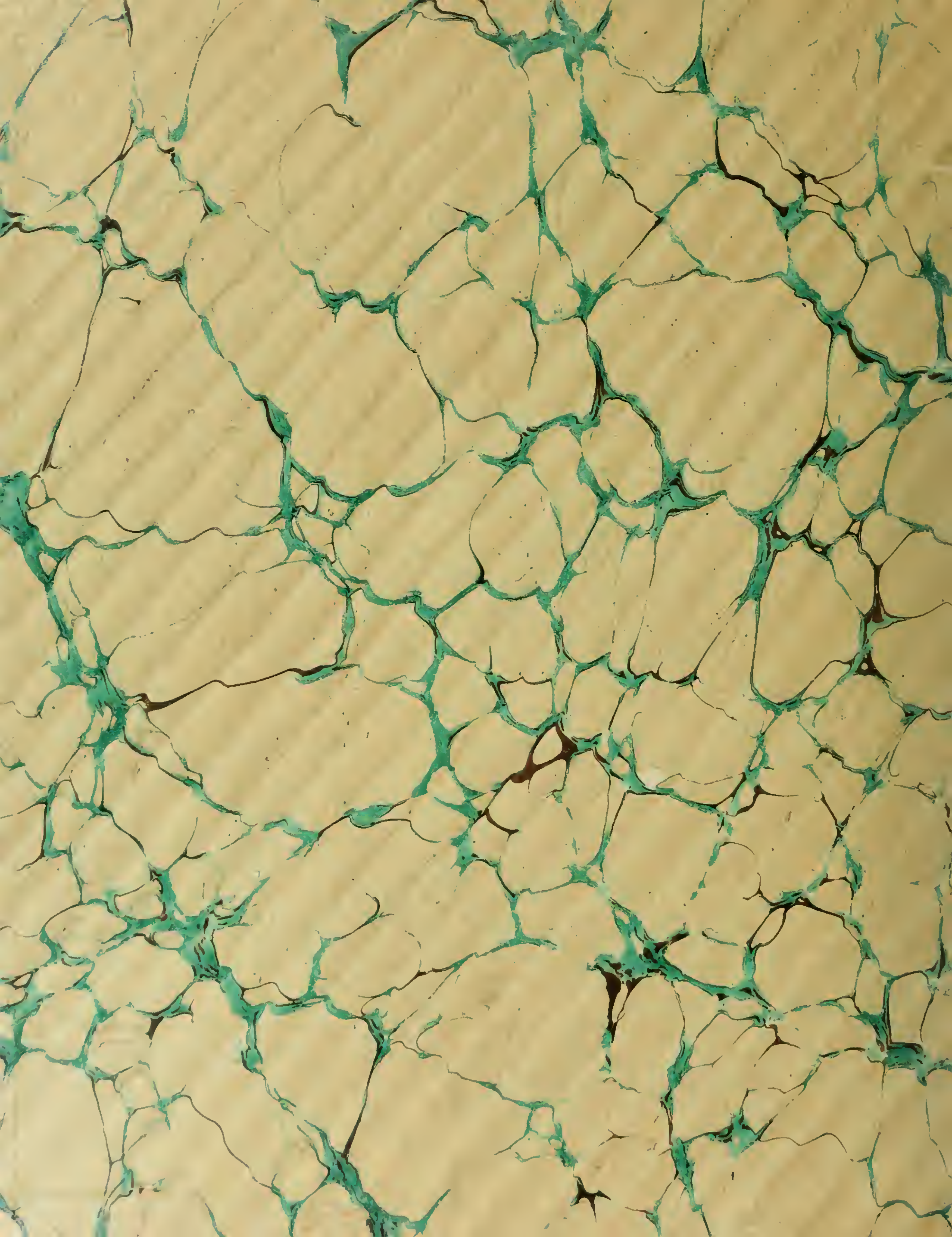
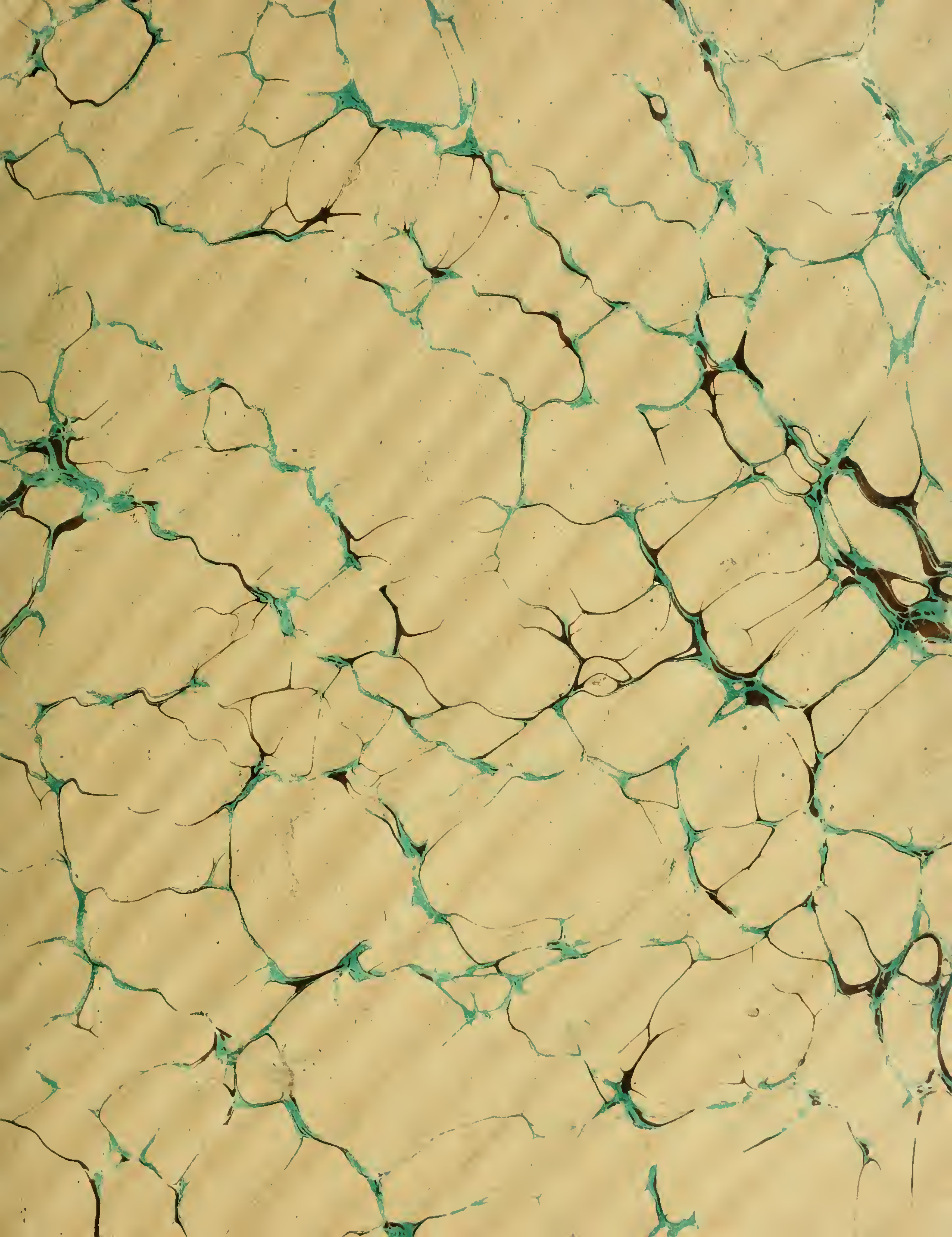






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XIII. — ANNÉE 1868.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1868

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME XIII.

ERRATUM.

Page 9, ligne dernière, *au lieu de* x du, *lisez* x, du.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BESGE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

« ... Le théorème de Jacobi concernant le nombre des décompositions du quadruple d'un entier impair m en une somme de quatre carrés impairs, que l'illustre auteur trouve égal à la somme

$$\zeta_1(m)$$

des diviseurs de m, donne lieu à l'équation suivante :

$$\sum F(4m - i^2) = \zeta_1(m), \tag{1}$$

où je désigne généralement par

$$F(k)$$

le nombre des classes de formes quadratiques binaires (primitives ou non) de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Le signe sommatoire porte sur les valeurs de i, qui forment la suite des nombres impairs

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots,$$

en ayant soin de s'arrêter au moment où la quantité placée sous le signe F deviendrait négative.

» En y remplaçant m par $3m$, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \sum F(12m - i^2) = \zeta_1(3m),$$

sous la condition de

$$12m - i^2 > 0.$$

Or je me suis assuré (par une démonstration bien simple) que l'équation (2) se décompose en deux autres, si l'on considère à part les valeurs de i divisibles par 3 et celles qui ne le sont pas.

» En ne considérant que ces dernières, ce que j'indiquerai au moyen d'un accent placé sur le signe sommatoire

$$\sum{}',$$

on a

$$(3) \qquad \sum{}' F(12m - i^2) = \zeta_1(3m) - \zeta_1(m).$$

» Veut-on au contraire ne retrancher de $12m$ que des carrés impairs dont les racines soient multiples de 3, on aura l'équation ci-après :

$$(4) \qquad \sum F(12m - 9i^2) = \zeta_1(m),$$

dans laquelle les valeurs de i seront encore

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11, \ldots,$$

comme pour l'équation (2), mais cette fois sous la condition de

$$12m - 9i^2 > 0.$$

Il y avait, je crois, quelque intérêt à rapprocher l'équation (4) de l'équation (1).

» Soit, par exemple,

$$m = 1,$$

par conséquent

$$\zeta_1(3m) = 4, \quad \zeta_1(m) = 1.$$

On devra avoir, d'après l'équation (3),

$$F(12 - 1^2) = 3,$$

ce qui est exact, puisqu'en effet

$$F(11) = 3;$$

puis, d'après l'équation (4),

$$F(12 - 9.1^2) = 1,$$

ce qui est exact aussi, puisque

$$F(3) = 1.$$

» Soit ensuite

$$m = 3,$$

d'où

$$\zeta_1(3m) = 13, \quad \zeta_1(m) = 4.$$

On devra avoir, d'après l'équation (3),

$$F(36 - 1^2) + F(36 - 5^2) = 9,$$

c'est-à-dire

$$F(35) + F(11) = 9,$$

ce qu'on trouve exact, eu égard aux valeurs connues

$$F(35) = 6, \quad F(11) = 3;$$

puis, d'après l'équation (4),

$$F(36 - 9.1^2) = 4,$$

c'est-à-dire

$$F(27) = 4,$$

ce qui est vrai encore,

» En prenant enfin

$$m = 5,$$

on aura, d'une part,

$$F(60-1^2)+F(60-5^2)+F(60-7^2)=18,$$

c'est-à-dire

$$F(59)+F(35)+F(11)=18;$$

puis, d'autre part,

$$F(60-9.1^2)=6,$$

c'est-à-dire

$$F(51)=6.$$

Mais je ne veux pas pousser plus loin ces vérifications faciles. »

Principes d'une nouvelle turbine à double couronne mobile et à lames liquides oscillantes; Considérations nouvelles sur les roues verticales à aubes courbes;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Cette roue se compose de deux turbines concentriques, analogues à celle de Borda, mais ne formant ensemble qu'une seule pièce mobile. L'eau entrera de bas en haut dans celle dont le diamètre est le moindre. Elle sortira latéralement par le sommet des aubes courbes de celle-ci pour entrer dans celle dont le diamètre est le plus grand. C'est par cette dernière qu'elle doit sortir du système après avoir agi sur ses aubes courbes, soit en montant, soit en descendant.

Ces aubes par lesquelles l'eau doit sortir peuvent donc avoir dans la couronne extérieure une disposition notablement différente de celle des aubes qui servent à faire entrer l'eau.

Pour bien comprendre comment l'eau peut passer de la première couronne dans la seconde, on peut supposer (ce qui sera précisément un des cas de la pratique) la hauteur de chute et le diamètre de la turbine tels que la force centrifuge diffère peu en moyenne de la pesanteur pour chaque molécule d'eau considérée. Dans l'hypothèse dont il s'agit, il est facile de voir que l'ascension de l'eau, en vertu de la vitesse acquise restante, quand chaque molécule arrivera dans la première couronne à la hauteur où l'on veut qu'elle tende à se transvaser, sera plus que suffisante pour que la force centrifuge, assez sensiblement égale à la pesanteur dans cette hypothèse, ait le temps de faire passer toute l'eau de la couronne intérieure dans la couronne extérieure.

Quant à la perte de force vive résultant de la vitesse latérale, dans le sens du rayon de la roue, par suite de la seule action de la force centrifuge, il est clair que si la largeur des couronnes est petite par

rapport à la hauteur de chute motrice, cette perte ne sera qu'une petite fraction de la chute.

Ce que je viens de dire a seulement pour objet de faire comprendre la possibilité du jeu de l'appareil dans une des circonstances qui peuvent être proposées. Mais à la rigueur on pourrait transvaser l'eau d'une couronne dans l'autre par un autre moyen.

Il y aurait une cause de perte de force vive plus importante peut-être que l'avantage de faire sortir l'eau par des orifices différents de ceux par lesquels elle est entrée, si, pour la transvaser d'une couronne à l'autre, on faisait courber le sommet de la lame liquide au moyen de surfaces courbes disposées à son sommet dans la couronne intérieure, sans prendre des précautions particulières. Mais il résulte de mes expériences, comme on peut le voir (t. VII, 2[e] série de ce *Journal*, dans un Mémoire qui y est publié p. 169 à 200), qu'on peut, même dans un coude à angle droit brusque, réduire à très-peu de chose la résistance de l'eau en mouvement, au moyen de lames courbes concentriques. Il est facile d'en conclure que, dans certaines limites du moins, on peut, en employant ces lames courbes concentriques, transvaser l'eau de la couronne intérieure dans la couronne extérieure, quand même on ne tiendrait pas compte de l'effet précité de la force centrifuge.

Je dois convenir que sans la roue à augets à grandes vitesses de M. Poncelet, je n'aurais pas pensé à l'avantage résultant de faire sortir l'eau par un orifice différent de celui par lequel elle est entrée, pour les circonstances où l'on voudrait, comme ci-dessus, employer dans une turbine un mode d'introduction de l'eau par ascension, analogue à celui qui se présente dans la roue verticale à aubes courbes de M. Poncelet.

Je me suis demandé pourquoi personne n'avait proposé pour ces dernières de transvaser l'eau motrice dans deux couronnes latérales verticales renfermant des aubes courbes, afin de permettre à l'eau de sortir par des orifices différents de ceux par lesquels elle est entrée. On pourrait essayer d'appliquer à cette circonstance, c'est-à-dire quand les roues verticales à aubes courbes ne seraient pas trop larges, un moyen analogue à celui que je viens d'indiquer pour se passer au besoin de la force centrifuge dans la turbine décrite ci-dessus, en trans-

vasant l'eau d'une couronne dans l'autre par l'emploi de canaux latéraux où la résistance aux coudes serait diminuée par l'emploi de lames concentriques.

M. le général Poncelet me fit l'honneur de présenter de ma part à l'Académie des Sciences, le 20 décembre 1863, une Note que j'avais adressée à cette Académie le 16 novembre de la même année, et qui sur sa demande a été publiée dans les *Comptes rendus*. Cette Note renferme la description du principe d'une turbine où l'eau entre par ascension sur des aubes courbes d'une manière analogue à ce qui se présente dans sa roue verticale à aubes courbes, où l'eau entre par-dessous.

En présentant aujourd'hui un perfectionnement de cette turbine, mon but est seulement de bien fixer les idées sur des principes dont l'utilité ne pourra être démontrée d'une manière définitive que par l'expérience. Mais abstraction faite de tout résultat industriel, il m'a semblé intéressant de signaler des idées qui pourront au moins servir de complément aux théories générales des turbines.

Il est d'ailleurs bon de remarquer que pour chacun des principes sur lesquels les turbines peuvent être contruites, il faut tenir compte des vitesses des aubes qui donnent le maximum d'effet. De sorte que cela seul se rattache à une question d'utilité publique.

Je n'aurais pas eu les idées, objet de cette Note, sans celles qui sont dues à M. Poncelet, et je serais heureux de montrer une fois de plus toute la portée des conséquences qui pourront, même plus tard, résulter des travaux de cet illustre savant.

Dans la turbine à lames oscillantes, telle que je l'avais présentée en 1863, on ne peut introduire l'eau par toute la circonférence, l'eau devant entrer et sortir par les mêmes orifices. Mais pour la nouvelle forme qui vient d'être indiquée, l'eau devant sortir par la couronne extérieure et entrer seulement par la couronne intérieure, on ne voit pas de raison pour qu'elle ne puisse pas être introduite en même temps par toutes les aubes courbes de la couronne intérieure. On conçoit en effet la possibilité de disposer au-dessous de cette couronne mobile une couronne de conducteurs fixes, analogue à celle qui introduit l'eau sur le pourtour entier des turbines du genre de celle Borda. Il est vrai que ces conducteurs amenant l'eau par-dessous seront d'une

construction plus difficile que pour ces dernières turbines. Il ne s'agit d'ailleurs ici que d'une simple exposition de principes, l'expérience seule pouvant montrer s'il n'y aura pas quelque difficulté particulière relative au mode d'introduction de l'eau dans ces turbines à lames liquides oscillantes.

Je suis un de ceux qui ont présenté il y a plus de vingt ans des résultats de calculs sur une disposition de roues verticales à aubes courbes, dans laquelle l'eau motrice entre de haut en bas, au lieu d'entrer de bas en haut (*voir* le *Bulletin de la Société Philomathique*, journal *l'Institut*, 1847 et 1848). Si je rappelle cette circonstance, c'est pour bien montrer le but de cette Note, qui n'a rien d'exclusif, mais permet de généraliser les idées sur des questions importantes pour la science et l'industrie.

ERRATUM.

TOME XI. — ANNÉE 1866.

Page 414, ligne 23, *au lieu de* est élevée, *lisez* elevée est.

Des maxima *et* minima *des sommes composées de valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées ;*

Par M. P. TCHÉBYCHEF.

Traduction du russe, par M. N. de Khanikof.

Extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XII.

1. Le calcul des variations nous donne le moyen de déterminer les valeurs *maxima* et *minima* des intégrales uniquement dans le cas, où la forme des fonctions inconnues, renfermées sous le signe de l'intégration, est supposée entièrement arbitraire. Mais si, d'après la nature de la question, la forme de ces fonctions inconnues est limitée par quelques conditions, leur détermination, en vue de rendre *maximum* ou *minimum* une intégrale, ou en général une somme quelconque de leurs valeurs, exige des procédés particuliers.

Nous nous bornerons ici à considérer le cas le plus simple de ce genre de questions; savoir, celui où la fonction inconnue est supposée entière et d'un degré déterminé, et où tous les termes de la somme proposée s'expriment au moyen de cette fonction, de ses dérivées et d'une variable indépendante, et forment une fonction également entière et de forme déterminée.

Ce cas mérite une attention particulière à cause de ses applications, qui comprennent, entre autres, la solution de la question de l'interpolation parabolique d'après la méthode *des moindres carrés*.

2. Soit

$$F(x, y, y', y'', \ldots)$$

une fonction donnée et entière de la variable indépendante x du poly-

nôme inconnu

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

et de ses dérivées

$$y', y'', \ldots.$$

Désignons par x_1, x_2, $x_3, \ldots$ une série de valeurs quelconques de la variable indépendante x, que pour plus de simplicité nous supposerons différentes entre elles, et par $\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ la somme des valeurs de la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots)$ pour ces valeurs de la variable x. La valeur de cette somme dépendra de celle des coefficients A_0, $A_1, \ldots$, $A_l, \ldots$, A_{m-1} du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

et les valeurs de ces coefficients qui rendront la somme

$$\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$$

un *maximum* ou un *minimum*, d'après les principes du calcul différentiel, seront données par les équations :

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_1} = 0,$$

. . . .

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_l} = 0,$$

. . . .

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_{m-1}} = 0.$$

Mais comme les quantités $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots, A_{m-1}$ n'entrent pas dans la formule $\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ indépendamment des fonctions $y, y', y'', \ldots$, la dérivée de cette somme par rapport à A_l s'exprimera en général ainsi :

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_l} = \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_l}$$
$$= \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dy_i}\frac{dy_i}{dA_l} + \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dy'_i}\frac{dy'_i}{dA_l}$$
$$+ \sum \frac{dF(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dy''_i}\frac{dy''_i}{dA_l} + \ldots.$$

Or la forme de la fonction

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

et de ses dérivées

$$y' = 1.A_1 + \ldots + lA_l x^{l-1} + \ldots + (m-1)A_{m-1}x^{m-1},$$
$$y'' = 1.2.A_2 + \ldots + l(l-1)A_l x^{l-2} + \ldots + (m-1)(m-2)A_{m-1}x^{m-2},$$
. . . .

nous donne

$$\frac{dy_i}{dA_l} = x_i^l, \quad \frac{dy'_i}{dA_l} = lx_i^{l-1}, \quad \frac{dy''_i}{dA_l} = l(l-1)x_i^{l-2}, \ldots.$$

En mettant ces valeurs des dérivées $\frac{dy_i}{dA_l}, \frac{dy'_i}{dA_l}, \frac{dy''_i}{dA_l}, \ldots$ dans l'expression trouvée pour la dérivée $\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, \ldots)}{dA_l}$, et en désignant, pour abréger, les valeurs des dérivées $\frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dy'}, \frac{dF}{dy''}$ pour x quelconque par M, N, P,..., et pour $x = x_i$ par M_i, N_i, P_i, nous aurons

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i \ldots)}{dA_l} = \sum M_i x_i^l + \sum lN_i x_i^{l-1} + \sum l(l-1)P_i x_i^{l-2} + \ldots$$

En déterminant, à l'aide de cette formule, les valeurs et la dérivée $\frac{d\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_l}$ pour $l = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$, nous verrons que les équations qui déterminent les valeurs du coefficient du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

qui rendent la somme $\sum F(x_i, y_i, y'_i, \ldots)$ un *maximum* ou un *minimum*, se réduisent donc à :

$$\sum M_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum 1.N_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1.2.P_i x_i^0 = 0,$$

. . . .

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots = 0.$$

3. Faisant, pour abréger,

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{m-1}) = \varphi(x),$$

et désignant par U, V, W,... les fonctions entières qu'on obtient en divisant les produits $M\varphi'(x)$, $N\varphi'(x)$, $P\varphi'(x)$,... par $\varphi(x)$, nous remarquons que les fractions

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \ldots,$$

transformées en fractions simples, s'expriment ainsi :

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U + \sum \frac{M_i}{x - x_i};$$

$$\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)} = V + \sum \frac{N_i}{x - x_i};$$

$$\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)} = W + \sum \frac{P_i}{x - x_i};$$

. . . .

où, d'après notre notation (n° 2) M_i, N_i, P_i,... désignent les valeurs de M, N, P,... quand on y fait $x = x_i$, et les sommations doivent être étendues à toutes les valeurs de x, depuis $x = x_1$ jusqu'à $x = x_m$.

Si, à l'aide de ces formules, nous déterminons la valeur de l'expression

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots, \tag{1}$$

nous trouverons qu'elle se réduit à

$$U - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} - \ldots + \sum\left(\frac{M_i}{x - x_i} + \frac{N_i}{(x - x_i)^2} + \frac{P_i}{(x - x_i)^3} + \ldots\right),$$

où les termes $U - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} - \ldots$, expriment une fonction entière. Quant à la somme

$$\sum\left[\frac{M_i}{x - x_i} + \frac{N_i}{(x - x_i)^2} + \frac{P_i}{(x - x_i)^3} + \ldots\right],$$

après y avoir transformé les fractions $\frac{M_i}{x - x_i}$, $\frac{N_i}{(x - x_i)^2}$, $\frac{P_i}{(x - x_i)^3}$, ..., en séries

$$\frac{M_i x_i^0}{x} + \frac{M_i x_i}{x^2} + \frac{M_i x_i^2}{x^3} + \ldots,$$

$$\frac{N_i x_i^0}{x^2} + \frac{2N_i x_i}{x^3} + \frac{3N_i x_i^2}{x^4} + \ldots,$$

$$\frac{1.2P_i x_i^0}{x^3} + \frac{2.3P_i x_i}{x^4} + \frac{3.4P_i x_i^2}{x^5} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et après y avoir réuni les termes de dénominateurs communs, elle nous donne la série suivante :

$$\sum\frac{M_i x_i^0}{x} + \frac{\sum M_i x_i + \sum 1.N_i x_i^0}{x^2} + \frac{\sum M_i x_i^2 + \sum 2N_i x_i + \sum 1.2P_i x_i^0}{x^3} + \ldots.$$

Donc il résulte que les sommes

$$\sum M_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum N_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1.2 P_i x_i^0,$$

. . . .

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots$$

sont les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}$, dans le développement de l'expression

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots,$$

selon les puissances décroissantes de la variable x. Mais nous savons, d'après le n° **2**, que ces sommes forment les premiers membres des équations qui déterminent les valeurs des coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

pour lesquels la somme $\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ devient un maximum ou un minimum, et nous concluons que ces équations s'obtiennent en réduisant à zéro les coefficients de $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^m}$, dans le développement de l'expression

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots,$$

suivant les puissances décroissantes de la variable x. Partant sous cette condition :

L'expression $\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots$, *avec une approximation poussée jusqu'aux puissances* x^{-m} *inclusivement, est égale à une*

fonction entière, où M, N, P,... sont, comme nous l'avons vu dans le nº **2**, les dérivées partielles de la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots)$, prises par rapport à $y, y', y'', \ldots$

4. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

étaient entièrement arbitraires : examinons maintenant le cas où le choix de ces coefficients est limité par plusieurs équations de la forme

$$\sum f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où $f_1(x, y, y', y'', \ldots)$, $f_2(x, y, y', y'', \ldots)$ sont des fonctions quelconques entières de x, du polynôme y et de ses dérivées $y', y'', \ldots$. Nous supposerons, pour commencer, que les sommes que nous venons d'écrire s'étendent à toutes les valeurs de la variable x

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1},$$

ainsi que la somme $\sum f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$, dont on cherche la valeur maximum ou minimum.

Par les propriétés connues des *maxima* et *minima relatifs*, les valeurs des coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$, qui rendent la somme $\sum f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)$ un maximum ou un minimum sous les conditions exprimées par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_1, \\ \sum f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sont déterminées en égalant à zéro les dérivées partielles prises par rapport à $A_0, A_1, \ldots, A_m$ de la somme

$$\sum f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \lambda_1 \sum f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) \\ + \lambda_2 \sum f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \ldots,$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des facteurs constants. Cette somme se ramène à la suivante :

$$\sum [f_0(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \lambda_1 f_1(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) \\ + \lambda_2 f_2(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots) + \ldots],$$

qui peut être remplacée par

$$\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots),$$

en supposant que

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = f_0(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \ldots) \\ + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots.$$

Ainsi, d'après ce qui vient d'être exposé dans les nos **2** et **3**, concernant les équations

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_0} = 0,$$
$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \ldots)}{dA_{m-1}} = 0,$$

nous concluons que, dans le cas actuel, les équations propres à déterminer les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

se réduiront à la condition trouvée à la fin du n° 3, en ne perdant pas toutefois de vue que la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots)$ doit être remplacée par la somme

$$f_0(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots,$$

où λ_1, $\lambda_2, \ldots$ sont des facteurs inconnus constants. Cette condition nous donnera les moyens de déterminer les coefficients du polynôme $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ en fonction des facteurs λ_1, $\lambda_2, \ldots$. En mettant enfin ces coefficients du polynôme y dans les équations (2), nous aurons autant d'équations qu'il y a de facteurs λ_1, $\lambda_2, \ldots$, d'où nous obtiendrons leur valeur.

5. Passons maintenant au cas où il s'agirait de rendre maximum ou minimum une somme

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

étendue aux valeurs $x_1 = a_1, a_2, a_3, \ldots$, mais de façon que le choix des coefficients du polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ soit limité par les équations de condition

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où les sommes s'étendent respectivement à toutes les valeurs de x:

$$x = b_1, b_2, b_3, \ldots,$$
$$x = c_1, c_2, c_3, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

différentes entre elles et différentes aussi des valeurs $x = a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Pour réduire ce cas à celui que nous venons d'examiner dans le numéro précédent, nous remplacerons toutes ces sommes, étendues à différentes valeurs de la variable x, par des sommes étendues aux mêmes valeurs de la variable indépendante. Pour y parvenir, nous

poserons

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots=\varphi_0(x),$$
$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots=\varphi_1(x),$$
$$(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots=\varphi_2(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots &= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\\ &\times(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots\\ &\times(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots\\ &\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\varphi(x).\end{aligned}$$

Puis nous déterminerons des fonctions entières S_0, S_1, $S_2,\ldots$, et T_0, T_1, $T_2,\ldots$, de manière à ce qu'elles satisfassent aux équations

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\varphi'(x)S_0=\varphi(x)T_0+\varphi'_0(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots,\\&\varphi'(x)S_1=\varphi(x)T_1+\varphi'_1(x)\varphi_0(x)\varphi_2(x)\ldots,\\&\varphi'(x)S_2=\varphi(x)T_2+\varphi'_2(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\ldots,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Ces équations auront toujours une solution, car, par hypothèse, les racines de l'équation $\varphi(x)=0$, égales à $a_1, a_2,\ldots; b_1, b_2,\ldots; c_1, c_2\ldots; \ldots;$ diffèrent toutes entre elles; donc la fonction $\varphi(x)$ n'aura pas de facteur commun avec sa dérivée $\varphi'(x)$. Il sera aisé de montrer, à l'aide de ces équations (3), que les sommes $\sum S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $\sum S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, $\sum S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots)$,..., étendues à toutes les valeurs de $x=a_1, a_2, a_3,\ldots; b_1, b_2, b_3,\ldots; c_1, c_2, c_3,\ldots; \ldots;$ se réduiront : à la somme $\sum\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de $x=a_1, a_2, a_3,\ldots$; à la somme $\sum\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de $x=b_1, b_2, b_3,\ldots$; à la somme $\sum\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de $x=c_1$, $c_2, c_3,\ldots$, et ainsi de suite.

Pour le faire voir à l'égard de la somme $\sum S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$.

nous remarquons que, d'après l'équation

$$\varphi'(x)\,S_0 = \varphi(x)\,T_0 + \varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots,$$

et d'après la manière dont les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$,... sont formées, la fonction S_0 deviendra zéro pour $x = b_1, b_2, b_3, \ldots; c_1, c_2, c_3, \ldots; \ldots$, c'est-à-dire pour les racines communes aux équations $\varphi(x) = 0$ et $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots = 0$, car, pour ces valeurs de la variable x, la dérivée $\varphi'(x)$ ne pourra pas devenir zéro, n'ayant pas, comme nous venons de le dire, de facteur commun avec $\varphi(x)$.

D'un autre côté, pour $x = a_1, a_2, a_3, \ldots$, racines communes aux équations $\varphi(x) = 0$ et $\varphi_0(x) = 0$, nous voyons que la dérivée

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = \frac{d\,\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots}{dx} &= \varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\\ &+ \varphi'_1(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\ldots\\ &+ \varphi'_2(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

se réduit au produit

$$\varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots,$$

et par conséquent, en vertu de l'équation

$$\varphi'(x)\,S_0 = \varphi(x)\,T_0 + \varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots,$$

pour ces valeurs de x, ou bien pour $x = a_1, a_2, a_3, \ldots$, S_0 sera égale à 1.

D'où il est évident que la somme $\sum S_0\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$, étendue à toutes les valeurs de la variable x, $x = a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots; c_1, c_2, c_3, \ldots$, se réduit à la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$, étendue uniquement aux valeurs de x, $x = a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Nous trouverons de même que les sommes

$$\sum S_1\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots), \quad \sum S_2\,\Phi_2(x, y, y', y'', \ldots), \ldots,$$

étendues aux valeurs de la variable x, $x = a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2,$

$b_3,\ldots;\ldots, c_1, c_2, c_3,\ldots,$ se réduisent à la somme $\sum \Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue seulement aux valeurs de $x = b_1, b_2, b_3,\ldots$; à la somme $\sum \Phi_2(x, y, y', y'',\ldots)$, étendue seulement aux valeurs de $x = c_1, c_2, c_3,\ldots$, et ainsi de suite.

En remplaçant, d'après ce qui vient d'être dit, les sommes $\sum \Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $\sum \Phi_1(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, étendues chacune à des valeurs différentes de la variable x, par les sommes $\sum S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots), \sum S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots), \sum S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, étendues aux mêmes valeurs de la variable x données par l'équation $\varphi(x) = 0$, nous concluons que dans ce cas les coefficients du polynôme $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ se détermineront par la méthode indiquée dans le numéro précédent, quand on remplacera dans les formules de ce numéro les fonctions $f_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $f_1(x, y, y', y'',\ldots)$, $f_2(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, par les produits $S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, $S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots),\ldots$, et par conséquent ils se détermineront par la condition établie à la fin du n° 3 si l'on y pose

$$F(x, y, y', y'',\ldots) = S_0\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots) + \lambda_1 S_1\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots) + \lambda_2 S_2\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots) + \ldots,$$

où $\lambda_1, \lambda_2,\ldots$, sont des facteurs constants, mais inconnus.

En déterminant, pour cette forme de la fonction $F(x, y, y', y'',\ldots)$, la valeur des dérivées

$$M = \frac{dF(x, y, y', y'',\ldots)}{dy},$$

$$N = \frac{dF(x, y, y', y'',\ldots)}{dy'},$$

$$P = \frac{dF(x, y, y', y'',\ldots)}{dy''},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en désignant les dérivées partielles des fonctions $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2,\ldots$,

prises par rapport à y, y', y'',..., par M_0, M_1, M_2,..., N_0, N_1, N_2,..., P_0, P_1, P_2,..., nous obtenons

$$\begin{aligned}
M &= S_0 M_0 + \lambda_1 S_1 M_1 + \lambda_2 S_2 M_2 + \ldots,\\
N &= S_0 N_0 + \lambda_1 S_1 N_1 + \lambda_2 S_2 N_2 + \ldots,\\
P &= S_0 P_0 + \lambda_1 S_1 P_1 + \lambda_2 S_2 P_2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc l'expression (1), qui d'après le n° 5, doit être égale, pour la valeur cherchée du polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$, à une fonction entière, avec une approximation poussée jusqu'à la puissance x^{-m} inclusivement, s'exprimera ainsi :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{S_0 M_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 M_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 M_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots\\
&-\frac{d\left[\dfrac{S_0 N_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \dfrac{S_1 N_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \dfrac{S_2 N_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots\right]}{dx}\\
&+\frac{d^2\left[\dfrac{S_0 P_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \dfrac{S_1 P_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \dfrac{S_2 P_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots\right]}{dx^2}\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Mais les équations (3), qui servent à déterminer les fonctions S_0, S_1, S_2,..., nous donnent

$$\begin{aligned}
\frac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_0 + \frac{\varphi'(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots}{\varphi(x)},\\
\frac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_1 + \frac{\varphi'_1(x)\varphi_0(x)\varphi_2(x)\ldots}{\varphi(x)},\\
\frac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_2 + \frac{\varphi'_2(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\ldots}{\varphi(x)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En remplaçant, dans les seconds membres de ces équations, $\varphi(x)$ par

le produit $\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$, nous aurons

$$\frac{S_0\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_0 + \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)},$$
$$\frac{S_1\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_1 + \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)},$$
$$\frac{S_2\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_2 + \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où l'on voit que les fonctions $\frac{S_0\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{S_1\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{S_2\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \cdots$ et $\frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}$, $\frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)}$, $\frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)}, \cdots$ ne diffèrent entre elles que par des parties entières. Donc, si dans l'expression (4), nous mettons ces dernières à la place des premières, nous ne changerons que la partie entière de cette expression; quant au degré d'exactitude avec lequel cette formule représente une fonction, il restera le même, et par conséquent elle pourra toujours servir à déterminer le polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$. En exécutant cette substitution nous obtenons l'expression suivante :

$$(4\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{M_0\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \dfrac{M_1\,\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \dfrac{M_2\,\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots \\ -\dfrac{d\left[\dfrac{N_0\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \dfrac{N_1\,\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \dfrac{N_2\,\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right]}{dx} \\ +\dfrac{d^2\left[\dfrac{P_0\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \dfrac{P_1\,\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \dfrac{P_2\,\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right]}{dx^2} \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Cette expression, d'après ce qui vient d'être exposé, doit se réduire à une fonction entière, qui la représentera exactement jusqu'à la puissance $-m$ de la variable x inclusivement, toutes les fois que le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

aura des coefficients voulus pour que la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$

devienne un maximum ou un minimum, sous les conditions

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1, \quad \sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2, \ldots$$

Nous sommes parvenus à cette conclusion en supposant que les séries $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots$ ne contenaient pas des termes égaux entre eux; mais, par la méthode des limites, il nous serait aisé de l'appliquer aussi au cas où ces séries auraient des membres communs.

6. Nous avons établi dans ce qui précède, la condition qui sert à déterminer la valeur du polynôme, d'un degré donné y, qui rend la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$ un maximum ou un minimum, et nous n'avons fait que deux hypothèses concernant les coefficients de ce polynôme. D'après l'une, leurs valeurs étaient supposées arbitraires, et d'après l'autre, elles devaient satisfaire aux équations

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1, \quad \sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2, \ldots.$$

Dans ce dernier cas, la condition qui sert à déterminer le polynôme cherché contient des constantes inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, dont la valeur se trouve par les mêmes équations de condition auxquelles doit satisfaire le polynôme y, et qui sont en nombre égal à celui des inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

La détermination du polynôme y, limité par la condition de rendre la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$ un maximum ou un minimum, a de l'analogie avec la solution des questions semblables dans le calcul des variations. Dans le cas particulier, quand cette somme se réduit à une intégrale, le polynôme y, déterminé comme il vient d'être dit, peut être considéré comme une valeur approchée de la fonction qu'on obtient à l'aide de la méthode des variations. Mais dans le calcul des variations, la fonction cherchée, étant déterminée par une équation différentielle, s'obtient en l'intégrant par les méthodes connues, tandis que, dans le cas que nous examinons, la détermination du polynôme y exige des procédés spéciaux, car elle se réduit à une condition qui ne se laisse pas exprimer par des équations de formes connues.

Pour montrer comment des polynômes peuvent être déterminés à l'aide de ces conditions, examinons le cas très-simple où les fonctions $\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$, $\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)$, $\Phi_2(x, y, y', y'',\ldots)\ldots$ ne contiennent y qu'à une puissance qui ne dépasse pas la seconde, ses dérivées $y', y'',\ldots$ à une puissance qui ne dépasse pas l'unité, et avec des coefficients qui ne dépendent que de la variable x.

Dans ce cas les dérivées

$$\mathrm{M}_0 = \frac{d\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)}{dy}, \quad \mathrm{M}_1 = \frac{d\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)}{dy}, \ldots$$

ne contiendront pas $y', y'',\ldots$, et y ne s'y trouvera qu'à la première puissance. Pour les dérivées

$$\mathrm{N}_0 = \frac{d\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)}{dy'}, \quad \mathrm{N}_1 = \frac{d\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)}{dy'}, \ldots,$$

$$\mathrm{P}_0 = \frac{d\Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)}{dy''}, \quad \mathrm{P}_1 = \frac{d\Phi_1(x, y, y', y'',\ldots)}{dy''}, \ldots,$$

elles ne contiendront pas du tout $y, y', y'',\ldots$. Partant l'expression (4 *bis*) du n° 5 qui représente exactement le polynôme

$$y = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} x^{m-1}$$

jusqu'au terme multiplié par x^{-m} inclusivement, et qui doit être égale à une fonction entière, se réduira au binôme

$$uy - v,$$

dans lequel u et v ne sont fonction que de la seule variable indépendante x. Ainsi, dans ce cas, la recherche du polynôme

$$y = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \ldots + \mathrm{A}_{m-1} x^{m-1},$$

assujetti à la condition de rendre la somme $\sum \Phi_0(x, y, y', y'',\ldots)$ un maximum ou un minimum, se réduit à la détermination d'un polynôme y, de degré $m-1$, tel, que le binôme $uy - v$, qui lui est identique jusqu'au terme multiplié par x^{-m} inclusivement, soit une fonction

entière. Nous allons montrer que les polynômes qui jouissent de cette propriété s'obtiennent facilement à l'aide de la série que j'ai publiée dans mon Mémoire intitulé : *Développement des fonctions en séries, à l'aide des fractions continues* [*].

7. Nous avons établi dans ce Mémoire, qu'en développant une fonction quelconque u en fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

en désignant, de plus, par $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$ ses fractions réduites, par $R_1, R_2, R_3, \ldots$ les différences

$$uQ_1 - P_1, \quad uQ_2 - P_2, \quad uQ_3 - P_3, \ldots,$$

et par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ les fonctions entières qu'on obtient à l'aide de la formule

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\mathbf{E}q_n(Q_n v - Q_n v);$$

nous aurons pour développer la fonction v d'après les valeurs R_1, R_2, $R_3, \ldots$, la série que voici

$$v = \mathbf{E}v + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3, \ldots, \tag{5}$$

où $\mathbf{E}$ désigne la partie entière de la fonction, et où l'on admet que u et v sont des fonctions développables suivant les puissances entières et décroissantes de la variable x.

Pour déterminer, à l'aide de cette série, le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

au moyen duquel la différence $uy - v$ est réductible à une fonction

---

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. IV.

entière exacte, jusqu'aux termes en x^{-m} inclusivement, désignons par Q_μ le dernier dénominateur des fractions convergentes $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$, dont le degré soit inférieur à m, et par $F_\mu, F_{\mu-1}, \ldots, F_2, F_1$, $r_\mu, r_{\mu-1}, \ldots, r_2, r_1$ les quotients et les restes obtenus par la division du polynôme y par Q_μ, du premier reste r_μ, par $Q_{\mu-1}$, du second reste, par $Q_{\mu-2}$, et ainsi de suite.

En égalant les dividendes aux produits des quotients ajoutés aux restes, nous obtenons une suite d'équations

$$y = F_\mu Q_\mu + r_\mu, \quad r_\mu = F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + r_{\mu-1}, \ldots,$$
$$r_3 = F_2 Q_2 + r_2, \quad r_2 = F_1 Q_1 + r_1.$$

En éliminant de ces équations les restes $r_\mu, r_{\mu-1}, \ldots, r_3, r_2$, et en observant que le dernier reste r_1, qu'on obtient par la division de l'avant-dernier reste par $Q_1 = 1$ est zéro, nous sommes conduit à l'expression de y que voici

$$y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1.$$

Mais comme notre polynôme cherché $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$ ne sera jamais d'un degré supérieur à $m-1$, il est évident que la fonction F_μ, qui s'obtient par la division de y par Q_μ, ne pourra pas être d'un degré plus élevé que $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, et par conséquent son degré sera inférieur à celui du quotient $\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}$, car, par hypothèse, $Q_{\mu+1}$ est d'un degré supérieur à $m-1$. Quant aux fonctions $F_{\mu-1}, F_{\mu-2}, \ldots, F_2, F_1$, leurs degrés seront inférieurs à ceux des quotients $\frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}$, $\frac{Q_{\mu-1}}{Q_{\mu-2}}, \ldots, \frac{Q_3}{Q_2}, \frac{Q_2}{Q_1}$, car elles résultent de la division des restes $r_\mu, r_{\mu-1}, \ldots, r_2, r_1$ par $Q_{\mu-1}, Q_{\mu-2}, \ldots, Q_2, Q_1$, et ces restes eux-mêmes obtenus par la division de y par Q_μ, de r_μ par $Q_{\mu-1}$ et ainsi de suite, seront nécessairement de degrés inférieurs à $Q_\mu, Q_{\mu-1}, \ldots, Q_2, Q_1$.

Pour déterminer les facteurs $F_\mu, F_{\mu-1}, F_{\mu-2}, \ldots, F_2, F_1$ dans le dé-

veloppement de y par la formule

$$(6) \qquad y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1,$$

nous observons que le binôme $uy - v$ devient, en y substituant pour y sa dernière valeur, et en y exprimant v par la formule (5),

$$\begin{aligned} uy - v = {} & F_\mu Q_\mu u + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} u + \ldots + F_2 Q_2 u + F_1 Q_1 u \\ & - \mathbf{E} v - \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2 - \omega_3 R_3 - \ldots, \end{aligned}$$

en y remplaçant $Q_\mu u$, $Q_{\mu-1} u$, .., $Q_2 u$ et $Q_1 u$ par leurs valeurs déduites des égalités

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, \quad R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1}, \ldots,$$

nous obtenons la formule que voici

$$\begin{aligned} uy - v = {} & - \mathbf{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \ldots \\ & + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu + (F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \ldots \\ & + (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} + \ldots. \end{aligned}$$

En examinant cette nouvelle expression de la différence $uy - v$, nous voyons que ses termes

$$- \mathbf{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \ldots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu$$

forment une fonction entière, et que les autres, comme il est aisé de le voir, sont tous de puissances négatives et vont en décroissant. En effet, conformément à notre notation,

$$\begin{gathered} R_1 = Q_1 u - P_1, \quad R_2 = Q_2 u - P_2, \ldots, \\ R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1}, \; R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, \; R_{\mu+1} = Q_{\mu+1} u - P_{\mu+1}, \ldots, \end{gathered}$$

et ces restes, d'après les propriétés des fractions réduites, sont de degrés égaux à ceux des fractions

$$\frac{1}{Q_2}, \quad \frac{1}{Q_3}, \quad \frac{1}{Q_4}, \ldots, \quad \frac{1}{Q_\mu}, \quad \frac{1}{Q_{\mu-1}}, \quad \frac{1}{Q_{\mu-2}}, \ldots.$$

En rapprochant ces considérations de ce qui a été dit, dans le numéro précédent, sur les fonctions F_1, F_2, $F_3, \ldots$, $F_{\mu-1}$, F_μ, et, dans le Mémoire cité, sur les fonctions ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$, $\omega_{\mu-1}$, ω_μ, $\omega_{\mu+1}, \ldots$, il devient évident que dans les derniers termes de la formule

$$(F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \ldots$$
$$+ (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu) R + \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} + \ldots,$$

les facteurs de R_1, R_2, $R_3, \ldots$ seront des fonctions entières de degrés inférieurs à $\frac{Q_2}{Q_1}$, $\frac{Q_3}{Q_2}, \ldots$, $\frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}$, $\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}$, $\frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}} \cdots$.

Donc le premier de ces termes $(F_1 - \omega_1) R_1$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_2}{Q_1} \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_1}$ et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_2}$; le second terme $(F_2 - \omega_2) R_2$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_3}{Q_2} \frac{1}{Q_3} = \frac{1}{Q_2}$ et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_3}, \cdots$; le terme $\omega_{\mu+1}$, $R_{\mu+1}$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}} \frac{1}{Q_{\mu+2}} = \frac{1}{Q_{\mu+1}}$, et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_{\mu+2}}$, et ainsi de suite.

D'où il résulte que, dans l'expression ci-dessus trouvée, pour le binôme $uy - v$, la partie fractionnaire sera exprimée par la série

$$(F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \ldots$$
$$+ (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \ldots,$$

où les puissances des membres vont en décroissant. Donc le degré d'exactitude avec lequel notre binôme se réduit à une fonction entière sera déterminé par le degré du premier de ses termes qui ne devient pas zéro.

A l'aide de ce résultat, il nous sera aisé de trouver la valeur des fonctions F_1, $F_2, \ldots$, $F_{\mu-1}$, F_μ qui entrent dans l'expression (6) du polynôme cherché, ou de nous convaincre de son impossibilité.

Les termes $(F_1 - \omega_1) R_1$, $(F_2 - \omega_2) R_2, \ldots$, $(F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1}$, comme nous venons de le voir, ne peuvent etre de degrés inférieurs aux fractions $\frac{1}{Q_2}$, $\frac{1}{Q_3}, \ldots$, $\frac{1}{Q_\mu}$; donc ils ne peuvent être d'un degré infé-

rieur à x^{-m+1}, car, d'après notre notation, dans la suite des dénominateurs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu$, il n'y en aura pas un seul d'un degré supérieur à $m-1$. Ainsi la différence $uy - v$ ne peut se ramener à une fonction entière qui la représente exactement jusqu'au terme où x est de la puissance $-m$, que dans le cas où tous ces termes disparaissent, ce qui entraîne forcément les équations suivantes :

$$F_1 - \omega_1 = 0, \quad F_2 - \omega_2 = 0, \ldots, \quad F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1} = 0.$$

qui nous donnent

$$(7) \qquad F_1 = \omega_1, \quad F_2 = \omega_2, \ldots, \quad F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}.$$

Avec ces valeurs des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1}$, l'expression ci-dessus trouvée pour la partie fractionnaire du binôme $uy - v$ se réduit à la série

$$(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \omega_{\mu+2} R_{\mu+2} - \ldots,$$

où, comme nous venons de le voir, les termes $\omega_{\mu+1} R_{\mu+1}, \omega_{\mu+2} R_{\mu+2}, \ldots,$ sont de degrés inférieurs à ceux des fractions $\frac{1}{Q_{\mu+1}}, \frac{1}{Q_{\mu+2}}, \ldots,$ et par conséquent inférieurs à x^{-m}, car, d'après notre notation, les dénominateurs $Q_{\mu+1}, Q_{\mu+2}, \ldots,$ ne sont pas de degrés inférieurs à m. Nous voyons ainsi que pour réduire l'expression ci-dessus trouvée de la différence $uy - v$ à une fonction entière qui la représente exactement jusqu'aux termes où la variable x est à la puissance $-m$, il est nécessaire et suffisant de donner aux fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1}$ les valeurs (7) et de rendre la puissance du membre $(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu$ inférieure à $-m$.

Mais comme, d'un autre côté, pour que le polynôme cherché, représenté par la formule

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \ldots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

reste, comme l'exigent les conditions de la question, d'un degré qui ne soit pas supérieur à m, il est nécessaire et suffisant qu'avec les valeurs (7) des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1}$, le terme $F_\mu Q_\mu$ ne soit pas

d'un degré supérieur à $m-1$, car tous les autres termes, comme il est aisé de le voir, seront de degrés inférieurs à $m-1$.

En effet, conformément à ce qui vient d'être dit, les degrés des facteurs $F_1=\omega_1$ $F_2=\omega_2,\ldots,$ $F_{\mu-1}=\omega_{\mu-1}$ seront inférieurs à ceux de $\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_2},\ldots, \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}$: donc les produits F_1Q_1, $F_2Q_2,\ldots,$ $F_\mu Q_\mu$ ne contiendront que des termes de degrés inférieurs à $Q_2, Q_3,\ldots, Q_\mu$, et par conséquent inférieurs à la puissance x^{m-1}, car, d'après notre notation, tous ces dénominateurs des fractions réduites de u ont des degrés moindres que $m-1$.

En vertu de quoi nous concluons que le polynôme cherché y sera donné par la formule

$$y=F_1Q_1+F_2Q_2+\ldots+F_{\mu-1}Q_{\mu-1}+F_\mu Q_\mu,$$

où $F_1=\omega_1$, $F_2=\omega_2,\ldots,$ $F_{\mu-1}=\omega_{\mu-1}$, et où le facteur F_μ est une fonction entière déterminée par les conditions suivantes :

La puissance du produit $F_\mu Q_\mu$ *ne surpassera pas* $m-1$, *et la puissance du produit* $(F_\mu-\omega_\mu)R_\mu$ *ne surpassera pas* $-m-1$.

Or, d'après notre notation, $R_\mu=Q_\mu u-P_\mu$, de plus, d'après les propriétés des fractions réduites, $Q_\mu u-P_\mu$ étant du même degré que la fraction $\frac{1}{Q_{\mu+1}}$, on peut, en déterminant le facteur F_μ, par la méthode que nous venons d'exposer, remplacer R_μ par la fraction $\frac{1}{Q_{\mu+1}}$.

Ceci nous permet d'exprimer les conditions qui déterminent le facteur F_μ de la manière suivante :

La puissance du produit $F_\mu Q_\mu$ *ne surpassera pas* $m-1$, *et la puissance du quotient* $\frac{F_\mu-\omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ *ne surpassera pas* $-m-1$.

Pour ce qui est des fonctions ω_1, ω_2, $\omega_3,\ldots,$ elles s'expriment généralement, comme nous l'avons dit dans le numéro précédent, ainsi :

$$\omega_n=(-1)^n\mathbf{E}q_n(Q_n v-\mathbf{E}Q_n v).$$

Ayant déterminé à l'aide de cette formule les valeurs ω_1, $\omega_2,\ldots,$ $\omega_{\mu-1}$

et les ayant mises, conformément à (7), à la place de $F_1, F_2, \ldots F_{\mu-1}$ dans l'expression du polynôme cherché y, nous obtenons pour cette dernière la formule que voici :

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \ldots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

où le facteur F_μ doit satisfaire aux conditions que nous venons d'énoncer.

Nous allons donc nous occuper, dans le numéro suivant, de la manière de déterminer F_μ sous ces conditions.

8. D'après notre notation, Q_μ est le dernier dénominateur de la suite $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \ldots$, dont le degré est inférieur à m; par conséquent le dénominateur $Q_{\mu+1}$ sera, ou du degré m, ou d'un degré supérieur à m. Dans le premier cas, comme il sera aisé de le faire voir, il n'y aura qu'une valeur de F_μ propre à satisfaire aux conditions qui limitent le choix de cette quantité, c'est-à-dire qu'il faudra que F_μ soit égal à ω_μ; dans le second cas, ou il n'y aura pas du tout de valeur de F_μ qui satisfasse à ces conditions, ou bien F_μ s'exprimera au moyen d'une fonction à plusieurs coefficients arbitraires.

En effet, d'après les conditions qui déterminent la fonction F_μ, le degré du produit $F_\mu Q_\mu$ ne pourra pas surpasser $m - 1$, et celui du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ ne surpassera pas $-m-1$; mais le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est de la puissance m. Ainsi quand le numérateur sera entier et différent de zéro, le degré du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ sera nécessairement supérieur à $-m-1$. Donc, dans ce cas, on est forcé d'admettre que

$$F_\mu - \omega_\mu = 0,$$

ou bien

$$F_\mu = \omega_\mu.$$

Ensuite, d'après ce qui a été dit précédemment, le degré de la fonction ω_μ est inférieur à celui de $\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}$; donc, en donnant à F_μ la valeur ω_μ, nous rendons la puissance du produit $F_\mu Q_\mu$ inférieure à celle de $\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu} Q_\mu = Q_{\mu+1}$, et par conséquent inférieure à celle de x^m, car,

dans le cas que nous examinons, le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est du degré m.

D'où il résulte que si $Q_{\mu+1}$ est du degré m, on peut toujours faire $F_\mu = \omega_\mu$, et qu'aucune autre valeur de ce facteur F_μ ne satisfera aux conditions établies dans le numéro précédent.

Dès lors, dans ce cas, le polynôme cherché y ne peut avoir qu'une seule valeur, et elle sera déterminée par la formule que nous venons d'écrire, c'est-à-dire par

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \ldots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

pourvu que nous y fassions $F_\mu = \omega_\mu$.

Passons maintenant au cas où le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est d'une puissance supérieure à m. Conformément aux conditions qui déterminent le facteur F_μ, le produit $F_\mu Q_\mu$ doit être d'un degré qui ne soit pas supérieur à $m-1$, et le degré du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ ne doit pas surpasser $-m-1$, ou bien, ce qui est la même chose, le facteur F_μ ne doit pas avoir un degré supérieur à celui de $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, et le degré de la différence $F_\mu - \omega_\mu$ ne doit pas surpasser celui de $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$. Or cette propriété est évidemment exprimée par les deux équations suivantes :

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots \tag{8}$$

et

$$F_\mu - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots, \tag{9}$$

où ν désigne la puissance de la fonction $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, ν_1 celle de la fonction $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$; et les quantités $C_1, C_2, \ldots, C', C'', \ldots$, sont des coefficients indéterminés.

L'élimination de F_μ à l'aide de ces deux équations nous donne

$$\omega_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - C' x^{\nu_1} - C'' x^{\nu_1 - 1} - \ldots,$$

équation qui ne peut être satisfaite par aucune valeur des coefficients

$C_1, C_2, \ldots, C', C'', \ldots$, si le degré de la fonction ω_μ surpasse ν et ν_1. D'où il est aisé de voir que si la puissance de ω_μ est supérieure à ν et ν_1, il est impossible de satisfaire aux conditions qui déterminent F_μ dans l'expression du polynôme cherché, et par conséquent, dans ce cas, notre problème n'a pas de solution. Dans le cas contraire, quand la puissance de ω_μ n'est pas supérieure au moins à l'un des nombres ν et ν_1, la valeur du facteur F_μ sera facile à trouver, et, comme il est aisé de le voir, elle sera déterminée, ou par la seule équation (8) ou par la seule équation (9), selon que ν sera ou ne sera pas $<\nu_1$.

En effet, mettons l'expression de F_μ, donnée par l'équation (8), dans la formule (9), nous aurons

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots.$$

Si le nombre ν est inférieur au nombre ν_1, le degré de la première partie de cette équation ne surpassera pas celui de la seconde, car si $\nu < \nu_1$ la puissance de la fonction ω_μ ne peut être supérieure à ν_1, puisque dans ce cas, contrairement à l'hypothèse, cette puissance serait supérieure aux deux nombres ν et ν_1. Donc, par un choix convenable des coefficients $C', C'', \ldots$, on pourra toujours satisfaire, dans ce cas, à l'équation

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots,$$

quels que soient les coefficients $C_1, C_2, \ldots$ du premier membre de cette équation.

De même si ν n'est pas $<\nu_1$, l'équation (9) nous donne

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots,$$

et, en y laissant tous les coefficients arbitraires, nous obtenons une valeur de F_μ qui satisfait à l'équation (8) si l'on donne des valeurs convenables aux coefficients $C_1, C_2, \ldots$.

Ainsi, il est bien établi que toutes les fois que le degré de la fonction ω_μ n'est pas supérieur au moins à l'un des deux nombres ν et ν_1 $\left(\text{degrés des fonctions } \frac{x^{m-1}}{Q_\mu} \text{ et } \frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}\right)$, la valeur du facteur F_μ, satisfaisant

aux conditions du numéro précédent, peut être trouvée. De plus, la valeur de F_μ sera déterminée par l'équation

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots$$

ou par l'équation

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots$$

selon que l'on aura $\nu < \nu_1$ ou bien $\nu \overline{>} \nu_1$. Quant aux coefficients C_1, $C_2, \ldots$, C', $C'', \ldots$, ils restent arbitraires.

9. Pour donner un exemple, cherchons à déterminer le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

sous la condition de rendre maximum ou minimum la valeur de la somme

$$\sum \frac{1}{2}[y_i - f(x_i)]^2 \theta(x_i)$$

étendue aux valeurs $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Nous commencerons par supposer que le choix des coefficients A_0, $A_1, A_2, \ldots$ du polynôme cherché y n'est limité par aucune condition particulière, et puis nous traiterons le cas où la valeur d'un de ces coefficients est donnée.

La première hypothèse, avec les valeurs réelles de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ et l'invariabilité de signe de la fonction $\theta(x)$, nous donnera la formule déjà connue de l'interpolation parabolique d'après la méthode des *moindres carrés* dans les cas ordinaires; la seconde, avec les mêmes conditions pour les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots$ et la fonction $\theta(x)$, nous conduira aussi à une formule d'interpolation parabolique d'après la méthode des *moindres carrés*, mais dans les cas particuliers où l'un des coefficients de l'expression y est assujetti à la condition d'avoir une valeur donnée.

Si dans les formules du n° 2 nous faisons

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = \frac{1}{2}[y - f(x)]^2 \theta(x),$$

nous trouverons

$$M = \frac{dF(x, y, y', y'')}{dy} = [y - f(x)]\theta x,$$

$$N = \frac{dF(x, y, y', y'')}{dy'} = 0,$$

$$P = \frac{dF(x, y, y', y'')}{dy''} = 0,$$

avec de telles valeurs des fonctions M, N, P,... et dans l'hypothèse que le choix des coefficients du polynôme n'est limité par aucune condition spéciale, nous aurons à remplir d'après le n° **5** la condition suivante :

L'expression

$$[y - f(x)]\theta(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad où \quad \varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots$$

doit être réductible à une fonction entière, avec une approximation poussée jusqu'au terme x^{-m}, inclusivement.

Désignant par $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,..., $\psi_{\mu-1}(x)$, $\psi_\mu(x)$, $\psi_{\mu+1}(x)$ les dénominateurs des réduites qu'on obtient en développant la fonction $\frac{\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ en une fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{\mu-1} + \cfrac{1}{q_\mu + \cfrac{1}{q_{\mu+1} + \cdots}}}}},$$

et supposant que dans la suite de valeurs

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \psi_3(x),\ldots, \quad \psi_{\mu-1}(x), \quad \psi_\mu(x), \quad \psi_{\mu+1}(x),\ldots,$$

la dernière fonction d'un degré inférieur à m soit $\psi_\mu(x)$, nous trouverons que le polynôme $y = A_0 + A_1 x + \ldots + A^{m-1}x_{m-1}$, qui satis-

fait à cette condition, sera donné par la formule

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{\mu-1} \psi_{\mu-1}(x) + F_\mu \psi_\mu(x), \ldots,$$

où les facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\mu-1}$ seront déterminés par la formule

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} q_n \left[\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E} \frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right],$$

et le facteur F_μ, d'après le n° **8**, n'aura qu'une valeur déterminée $F_\mu = \omega_\mu$, si la fonction $\psi_{\mu-1}(x)$ est du degré m. Dans le cas contraire, si notre problème admet une solution, c'est-à-dire si la somme $\sum \frac{1}{2} [y_i - f(x_i)]^2 \theta x$ peut devenir un maximum ou un minimum, le facteur F_μ contiendra plusieurs coefficients indéterminés et sera donné par l'une des formules

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots,$$

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu-1} + \ldots,$$

où ν et ν_1 désignent les degrés des fonctions $\frac{x^{m-1}}{\psi_\mu(x)}$ et $\frac{\psi_{\mu+1}}{x^{m+1}}$. Comme précédemment, on appliquera la première de ces deux formules si $\nu < \nu_1$, et la seconde dans le cas de $\nu \overline{\gtrless} \nu_1$. Enfin pour savoir si notre problème admet une solution, il faudra examiner, comme nous l'avons indiqué dans le n° **8**, si le degré de la fonction ω_μ n'est pas supérieur au moins à l'un des nombres ν et ν_1, car ce n'est que dans ce cas que le facteur F_μ peut satisfaire aux conditions du problème.

Quand les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ont des valeurs réelles, et que la fonction $\theta(x)$ ne change pas de signe, la fraction continue, qu'on obtient en développant l'expression $\frac{\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, comme il est connu, sera de la forme

$$q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \ldots}},$$

où A_1, B_1, A_2, B_2,... sont des quantités constantes [*]. Dans ce cas les fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, ont pour valeurs

$$q_1 = A_1 x + B_1, \quad q_2 = A_2 x + B_2, \ldots, \quad q_n = A_n x + B_n,$$

et les dénominateurs $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{m-1}(x), \psi_m(x), \psi_{m+1}(x), \ldots$, des fractions réduites de l'expression $\frac{\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ seront de degrés o, 1, 2,..., $m-2$, $m-1$, m,....

Comme dans ce cas le dernier dénominateur d'un degré inférieur à m, est $\psi_m(x)$, et celui qui le suit immédiatement, c'est-à-dire $\psi_{m+1}(x)$ est du degré m, d'après ce qui a été établi, le polynôme cherché y sera donné par la formule

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x).$$

Mettons à la place de q_n sa valeur $q_n = A_n x + B_n$ dans la formule du nº **7** qui sert à calculer les facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m$, nous aurons

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E}(A_n x + B_n)\left[\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E}\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right].$$

Si nous désignons par U la fonction entière qu'on obtient en divisant le produit $\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)$ par $\varphi(x)$, nous aurons, par notre notation

$$\mathbf{E}\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U$$

et

$$\frac{\psi_n(x) f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U + \frac{\psi_n(x_1) f(x_1)\theta(x_1)}{x - x_1} + \frac{\psi_n(x_2) f(x_2)\theta(x_2)}{x - x_2} + \ldots$$
$$= U + \sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x - x_i}.$$

---

[*] Voyez le Mémoire intitulé : *Recherches sur les fractions continues* (Outchénié... *Mémoires savants de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. IX). Du reste cela résulte aussi de ce que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ étant réels, et $\theta(x)$ conservant toujours le même signe, notre problème a toujours une solution, quel que soit m, car cela suppose d'après le nº 8 que dans la série $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, il y aura toujours un dénominateur du degré m, et que par conséquent il s'y trouvera des dénominateurs de tous les degrés, ce qui n'est possible que quand la fraction continue dont il s'agit a la forme que nous venons d'indiquer.

d'où nous tirons

$$\frac{\psi_n(x)f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E}\frac{\psi_n(x)f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum\frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i}.$$

Ainsi l'expression trouvée ci-dessus pour le facteur ω_n se réduit à la suivante :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\mathbf{E}(A_n x + B_n)\sum\frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i}.$$

Cette formule peut s'écrire ainsi :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\mathbf{E}\left(A_n + \frac{B_n}{x}\right)\sum\frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{1-\frac{x_i}{x}}.$$

Le terme placé sous le signe $\mathbf{E}$ est du degré zéro ; donc, en faisant $x = \infty$, nous aurons sa partie entière, et nous trouverons ainsi :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}A_n\sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i).$$

En calculant d'après cette formule les valeurs des facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m$, et en les mettant dans l'expression du polynôme y, nous obtiendrons la formule que voici :

$$\begin{aligned} y = {} & A_1\sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_1(x_i).\psi_1(x) - A_2\sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_2(x_i).\psi_2(x) + \ldots \\ & + (-1)^{m-2}A_{m-1}\sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_{m-1}(x_i).\psi_{m-1}(x) \\ & + (-1)^{m-1}A_m\sum f(x_i)\theta(x_i)\varphi_m(x_i).\psi_m(x).\end{aligned}$$

C'est ainsi que l'on détermine le polynôme du degré $m-1$ qui rend maximum ou minimum la somme $\sum\frac{1}{2}[y_i - f(x_i)]^2\theta(x_i)$, étendue aux valeurs réelles de $\psi = x_1, x_2, x_3, \ldots$, et dont le facteur $\theta(x)$ ne change pas de signe. Cette formule sert pour l'interpolation parabolique, d'après la méthode des *moindres carrés*, quand il n'existe aucune condition particulière relative à ses coefficients.

10. Passons maintenant au cas où, dans le polynôme cherché

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1}x^{m-1},$$

le coefficient de x^l, où l est un des nombres 0, 1, 2,. ., $m-1$, est supposé donné.

La condition que le coefficient de x^l, dans le polynôme y, doit être égal à un nombre donné, peut être exprimée par l'égalité

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$

pourvu toutefois qu'on n'étende cette somme qu'à la seule valeur de la variable x, $x = 0$, et que la fonction $\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)$ se réduise à un seul terme $y^l = \frac{d^l y}{dx^l}$. Dans ce cas, d'après la notation du n° 5, nous aurons

$$\varphi_1(x) = x \quad \text{et} \quad \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{1}{x},$$

et toutes les dérivées partielles de $\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = y^l$, prises par rapport à y, y', y'', y''', seront zéro, excepté la seule dérivée y^l, qui sera égale à 1.

Supposant, comme ci-devant, que la somme qu'on se propose de rendre un maximum ou un minimum est $\sum \frac{1}{2}[y - f(x)]^2 \theta(x)$, et qu'elle s'étend aux valeurs de la variable x, telles que $x_1, x_2, x_3, \ldots$, nous aurons, en conservant la notation du n° 5,

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots) = \frac{1}{2}[y - f(x)]^2 \theta(x),$$

$$M_0 = \frac{d\Phi_0}{dy} = [y - f(x)]\,\theta(x),$$

$$N_0 = \frac{d\Phi_0}{dy'} = 0,$$

$$P_0 = \frac{d\Phi_0}{dy''} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots = \varphi_0(x).$$

Avec ces valeurs des fonctions M_0, N_0, $P_0, \ldots$, $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$, et ayant en vue la remarque que nous venons de faire sur les dérivées

partielles de la fonction $\Phi_1(x_1, y, y', y'', \ldots) = y^l$, prises par rapport à $y, y', y'', \ldots, y^l, \ldots$, le polynôme cherché sera déterminé, d'après le nº **5**, par la condition suivante :

L'expression $\dfrac{(y - f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + (-1)^l \dfrac{d^l \frac{\lambda_1}{x}}{dx^l}$ *doit se réduire à une fonction entière avec une approximation poussée jusqu'au terme* x^{-m} *inclusivement.*

Comme cette expression, après la différentiation et la multiplication indiquées, se réduit à la différence

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}\,y - \left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}}\right],$$

pour déterminer le polynôme y nous devons, conformément à ce qui a été dit au nº **7**, développer en fraction continue l'expression $\frac{\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}$.
En nous bornant à examiner le cas où toutes les valeurs de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sont réelles, et où la fonction $\theta(x)$ ne change pas de signe, nous aurons, d'après ce qui a été dit dans le numéro précédent,

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} = q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \cdots}},$$

où $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$, sont des constantes. Ce développement de la fonction $\frac{\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}$ nous donnera la suite de dénominateurs des réduites $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{m-1}(x), \psi_m(x), \psi_{m+1}(x), \ldots$, qui seront de degré $0, 1, 2, \ldots, m-2, m-1, m, \ldots$.

Comme le dernier dénominateur de degré inférieur à m est $\psi_m(x)$, et comme celui qui le suit immédiatement, $\psi_{m+1}(x)$, est de degré $m+1$, le polynôme cherché $y = A_0 + A_1 x + \ldots + \omega_{m-1} x^{m-1}$, d'après le nº **8**, s'exprimera par

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x), \ldots$$

Mais comme dans le cas que nous examinons

$$q_1 = A_1 x + B_1, \quad q_2 = A_2 x + B_2, \ldots, \quad Q_1 = \psi_1(x), \quad Q_2 = \psi_2(x), \ldots,$$

et

$$v = \frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}},$$

nous aurons, d'après le n° **7**, pour déterminer les facteurs $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m$, la formule que voici :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathbf{E}\,(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left\{\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}}\right]\psi_n(x) - \mathbf{E}\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l\lambda_1}{x^{l+1}}\psi_n(x)\right]\right\};$$

ce qui peut être écrit ainsi :

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathbf{E}\,(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \mathbf{E}\,\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}\right] - (-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots l\lambda_1\,\mathbf{E}\,(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left[\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathbf{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right].$$

Mais, d'après ce qui a été établi dans le numéro précédent, l'expression $\mathbf{E}\,(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)\left[\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \mathbf{E}\,\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}\right]$ se réduit à

$$\mathrm{A}_n \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i),$$

et la fonction $\psi_n(x)$, développée par la série de Maclaurin, nous donne

$$\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{\psi_n(0)}{x^{l+1}} + \frac{1}{1}\,\frac{\psi'_n(0)}{x^l} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots l}\,\frac{\psi_n^l(0)}{x} + \frac{1}{1.2\ldots l(l+1)}\,\psi_n^{l+1}(0) + \frac{x}{1.2\ldots(l+1)(l+2)}\,\psi_n^{l+2}(0) + \ldots;$$

par conséquent

$$\mathbf{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{1}{1.2\ldots l(l+1)}\,\psi_n^{l+1}(0) + \frac{x}{1.2\ldots(l+1)(l+2)}\,\psi_n^{l+2}(0) + \ldots,$$

et la différence $\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathbf{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}$ se réduit à la série

$$\frac{\psi_n(0)}{1.2\ldots l}\,\frac{1}{x} + \frac{\psi_n(0)}{1.2\ldots(l-1)}\,\frac{1}{x^2} + \ldots.$$

En multipliant cette expression par $A_n x + B_n$ et en rejetant dans ce produit $\frac{A_n \psi_n^l(0)}{1.2\ldots l} + \left[\frac{B_n \psi_n^l(0)}{1.2\ldots l} + \frac{A_n \psi_n^{l-1}(0)}{1.2\ldots(l-1)}\right]\frac{1}{x} + \ldots$, les termes où la variable x a des exposants négatifs, nous aurons pour la valeur de $\mathbf{E}(A_n x + B_n)\left[\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right]$ l'expression $\frac{A_n \psi_n^l(0)}{1.2\ldots l}$. Par conséquent la formule qui sert à déterminer ω_n se réduit à

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n \left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i) - \lambda_1 \psi_n^l(0)\right].$$

Ayant déterminé d'après cette formule les valeurs des facteurs ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$, ω_{m-1}, ω_m et les ayant mises dans l'expression du polynôme cherché $y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1}\psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x)$, nous verrons qu'il se réduit à

$$\begin{aligned} y = {} & A_1\left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_1(x_i) - \lambda_1 \psi_1^l(0)\right]\psi_1(x) \\ & - A_2\left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_2(x_i) - \lambda_1 \psi_2^l(0)\right]\psi_2(x) + \ldots \\ & + (-1)^{m-1} A_m\left[\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_m(x_i) - \lambda_1 \psi_m^l(0)\right]\psi_m(x), \end{aligned}$$

où λ_1 est une constante inconnue qui, dans notre cas, sera déterminée par la condition que le coefficient de x^l doit avoir une valeur donnée.

On trouvera aussi de la même manière l'expression du polynôme y, dans le cas où plusieurs de ses coefficients sont donnés, et les autres sont déterminés par la condition de rendre maximum ou minimum la somme $\sum \frac{1}{2}[y - f(x)]^2\,\theta(x)$, étendue à des valeurs données de la variable x.

MÉMOIRE SUR UNE MACHINE SOUFFLANTE,

COMPRENANT

UN TRAVAIL INÉDIT SUR LE MÊME SUJET;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

J'ai présenté à l Académie des Sciences, le 9 décembre 1844, un Mémoire inédit, conservé au Secrétariat de cette Académie, il est enrégistré sous le n° 377. Je vais en donner la copie même en y laissant quelques détails secondaires qui ont un peu vieilli, et sur lesquels je reviendrai plus loin, mais que j'ai cru devoir conserver surtout pour le cas où il y aurait une question de priorité. On verra d'ailleurs que ces détails ne sont pas inutiles et combien ils font ressortir la nouveauté du résultat définitif.

« Les machines soufflantes mues par des chutes d'eau ayant divers inconvénients, j'ai été invité à m'occuper plus spécialement de ce problème. Le résultat suivant auquel je suis parvenu est assez simple pour pouvoir être expliqué même sans la figure, que l'on trouvera plus loin [*].

» Étant donné un tuyau de conduite dont une des extrémités part d'un réservoir contenant les eaux motrices, l'autre se relevant verticalement, je suppose que l'eau sort à gueule-bée par cette dernière extrémité jusqu'à ce qu'elle y soit parvenue à une vitesse convenable, si à cette époque une vanne cylindrique est soulevée de manière à établir la communication entre ce tuyau et un tuyau vertical supérieur,

[*] Cette figure n'est pas indispensable à cause des simplifications résultant de phénomenes nouveaux trouvés depuis la rédaction de ce Mémoire inédit.

l'eau ne pouvant plus s'échapper latéralement s'élancera dans ce dernier, que je suppose avoir vers son sommet deux systèmes de clapets à air, dont un a pour but de permettre l'introduction de l'air dans un réservoir latéral. Cet air sera comprimé dans le réservoir dont il s'agit et d'où il partira en temps convenable pour produire l'effet industriel voulu. La colonne liquide redescendra ensuite au-dessous de la vanne, en vertu de la hauteur acquise dans le tuyau vertical et de la détente de l'air qui reste à son sommet. Le second système de soupapes à air a pour but d'empêcher la production du vide à l'époque de la détente. Quand le mouvement de descente est éteint, et que la vanne est redescendue, le jeu recommence ainsi de suite indéfiniment.

» Il n'est pas nécessaire d'employer une vanne frottante, il est même plus simple d'employer la soupape cylindrique a double siége, dite de Cornwall, qui, étant liée à un flotteur ou à un contre-poids d'une manière quelconque, sera soulevée par la percussion de l'eau, quand celle-ci partie du repos aura acquis la vitesse suffisante, et retombera par son propre poids, quand la colonne liquide l'abandonnera à elle-même en redescendant.

» Quand l'eau sort à gueule-bée, elle n'est point arrêtée dans sa course par cette soupape qui *coupe* seulement le rebord extérieur du *champignon liquide*. Lorsque cette opération se fait, il faut seulement que les filets se relèvent et prennent à leur sommet la même vitesse qu'à la sortie immédiate du tuyau. Mais par la raison même que le mouvement de la soupape ou vanne se fait de bas en haut et ne peut d'ailleurs être rigoureusement instantané, la percussion qui en résulte dans le liquide n'a rien de brusque, d'autant plus que selon un principe de M. Poncelet, il y a une différence capitale dans l'importance de la percussion considérée comme effet destructif entre le choc d'une grande masse contre une petite, et celui d'une petite masse contre une grande. Or, précisement dans le cas dont il s'agit, une assez longue colonne n'a qu'à augmenter un peu les vitesses d'une masse très-petite par rapport à elle, et qui n'est qu'un simple bouillon de sortie, de sorte que, selon ce principe, il ne peut en résulter qu'un choc insignifiant.

» Il n'y a pas non plus de percussion brusque de la soupape sur son siége, quand elle se ferme; d'abord, parce qu'elle porte un cône annulaire, qui entre dans un cône annulaire fixe d'où il chasse l'eau.

Or, on sait que les cônes rentrant ainsi l'un dans l'autre sont très-usités en Amérique pour amortir parfaitement les chocs, et leur disposition sera d'autant plus facile à établir ici que, les tuyaux étant assez gros, la soupape ou vanne cylindrique n'aura pas à parcourir un chemin assez petit pour qu'il en résulte sous ce rapport quelque difficulté d'exécution[*].

» Mais ce moyen, n'étant pas le seul qu'on puisse employer, je profiterai de cette occasion pour proposer d'une manière plus générale, que je ne l'ai fait autre part, un nouveau modérateur hydraulique.

» Étant données des pièces solides quelconques en mouvement, si l'on pouvait y appliquer des forces immatérielles vers l'époque où l'on veut qu'elles s'arrêtent, le problème d'un modérateur serait résolu. Or, c'est précisement ce qui arrivera si, quand ces pièces partent du repos, elles enlèvent sans plus de choc entre elles qu'il n'y en a dans la machine d'Atwood, un flotteur d'une densité analogue à celle de l'eau. L'inertie du système sera surmontée pendant le mouvement et le poids du flotteur n'agira qu'à l'époque où il sortira de l'eau, précisément comme le ferait une force immatérielle. Les pièces de la machine quelconque en mouvement seront donc graduellement arrêtées par pression et non par percussion. On peut même observer que la loi selon laquelle elles s'arrêtent est déterminée par la forme du flotteur qui s'émerge. Si, comme dans le cas dont il s'agit, on ne veut pas que la pièce arrêtée revienne immédiatement sur ses pas, condition qui peut d'ailleurs ici être assurée par la forme de la soupape de Cornwall sous laquelle agira la pression de la colonne ascendante dans le tuyau vertical, il suffit que le flotteur ayant ce but particulier se décroche et retombe à sa place en vertu de l'excédant de sa densité sur celle de l'eau. Il sera accroché à la période suivante quand la pièce dont il s'agit arrivera elle-même au repos en descendant, et ainsi de suite indéfiniment.

---

[*] « Il est à peine nécessaire de remarquer qu'en retombant d'elle-même la soupape convenablement équilibrée n'aura que des vitesses analogues à celles de la colonne descendante, à l'époque où son mouvement s'éteint. On sait d'ailleurs ce que c'est qu'une soupape qui retombe sur son siége. »

» Je reviens maintenant plus particulièrement à la machine soufflante, en m'attachant plutôt à faire bien comprendre son principe qu'à décrire des détails secondaires qu'il suffisait d'indiquer.

» Quand on n'aura besoin de comprimer l'air que sous des pressions médiocres, analogues par exemple à celle d'une hauteur d'eau d'un mètre, la colonne liquide n'éteindra son mouvement qu'en parcourant un chemin qui sera loin d'être très-petit. De ce côté, il n'y aura donc pas non plus de choc brusque, le mouvement s'éteindra, il est vrai, plus tôt que si la colonne n'avait point à faire un travail utile, mais les choses se passeront évidemment d'une manière qui aura bien moins d'analogie avec une percussion qu'avec ce qui se présenterait, si la colonne était transportée sur une autre planète où la pesanteur serait plus grande que sur la terre. Il m'a semblé que cette dernière idée offrait le moyen le plus sensible de faire voir que par le mode d'action particulier de la résistance d'un long matelas d'air qui, dans les machines soufflantes ordinaires, ne sera comprimé que sous des pressions peu élevées, le mouvement s'éteindrait aussi graduellement qu'on peut le désirer, conformément aux vrais principes de la mécanique industrielle. La compression du matelas d'air ne parvient point d'ailleurs instantanément à son maximum.

» La quantité de travail utilement produit, plus le travail disponible qui reste après l'action utile, afin que la colonne liquide en redescendant puisse abandonner la soupape annulaire, dépend, si le tuyau horizontal est assez long en amont de cette soupape, du temps pendant lequel l'écoulement extérieur durera. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que, si ce tuyau est assez long, la force vive emmagasinée dans son intérieur pourra être, si l'on veut, bien plus grande que celle qui serait suffisante pour faire verser l'eau à des hauteurs bien plus considérables que celles de la chute motrice, si le tuyau vertical était sans soupape à air et indéfiniment prolongé; d'où il résulte que l'on aurait bien plus de force qu'il n'en faudrait pour que le niveau redescendît plus bas que la soupape annulaire.

» Au reste, pour ne laisser aucun doute sur ce point particulier, j'ai construit un petit modèle fonctionnant d'un appareil de ce genre; comme il avait simplement pour but d'établir la possibilité de son jeu, étant indéfiniment abandonné à lui-même, il n'était d'ailleurs employé

qu'à souffler alternativement de l'air, ou à verser de l'eau par le sommet de son tuyau vertical.

» On pourrait craindre au premier aperçu qu'il n'y eût pour des pressions un peu plus fortes des vibrations dans la colonne d'air. Je ferai remarquer à ce sujet que le phénomène se présente d'une manière trop graduelle pour que ces craintes puissent être bien sérieuses. Quand le matelas d'air est comprimé, et qu'il pousse une partie de son fluide dans un réservoir d'air cylindrique d'un diamètre analogue au sien et d'une longueur suffisante, où la compression ne sera pas généralement trop différente de celle de l'atmosphère, il est naturel de penser que la sortie de l'air du tuyau vertical dans ce cylindre comprimé sous un excès de pression, qui n'est pas très-considérable, présentera des phénomènes qui ne seront pas sans analogie avec ceux de la sortie de l'air poussé par un tuyau dans l'atmosphère, puisque dans ce dernier milieu la pression naturelle est elle-même considérable. Or voici comment j'ai étudié ce dernier phénomène.

» Étant donné un tuyau d'environ $0^m,05$ de diamètre, et de 4^m de long, dont les deux extrémités étaient ouvertes, je bouchais avec la main une de ces extrémités, et je l'enfonçais par l'autre à diverses profondeurs dans le bassin Saint-Victor. Le tuyau, étant ensuite subitement débouché par le sommet, l'eau du bassin s'y élançait en vertu des lois de l'oscillation, et je suivais de l'œil avec une autre personne le mouvement des poussières adhérentes au tuyau avant qu'il fût enfoncé, et qui étaient chassées par le mouvement de la colonne liquide. Il était naturel de penser que le mouvement de ces poussières pourrait indiquer s'il y avait des vibrations intérieures capables d'absorber des quantités notables de force vive dans la colonne d'air. Or, on voyait très-distinctement les poussières chassées dans le même sens que l'eau, tant que celle ci montait, sans revenir sur leurs pas, et de plus, la colonne d'air ne s'éparpillait pas immédiatement à sa sortie du tuyau, mais conservait jusqu'à une certaine distance la forme cylindrique d'une manière bien tranchée. Je pense donc que la colonne d'air sera chassée sans vibrations trop importantes dans l'appareil que je propose, s'il a un assez grand diamètre pour que celui du réservoir d'air ne soit pas trop différent du sien, ou ne s'élargisse que d'une manière assez graduelle.

» Quant à l'expérience dont je viens de parler, il est à peine nécessaire d'ajouter que je ne considérais pas ce qui se passe au moment où j'ouvrais le sommet du tube, et où il se présentait une petite explosion pendant un temps trop court pour qu'elle pût être facilement observée.

» Dans les machines soufflantes dont il s'agit ici, le volume de l'air chassé à chaque période dans le réservoir sera toujours un peu moindre que celui du tuyau vertical, qui peut d'ailleurs être élargi. On peut varier les effets, soit en laissant la colonne liquide monter plus haut pour ne redescendre guère par son propre poids, *soit en limitant la hauteur de son ascension et conservant à son sommet de l'air comprimé, qui agira comme nous l'avons dit par sa détente*. Cela peut dépendre du genre d'effets qu'on aura à produire, et je ne crois pas devoir encore entrer dans ces détails [*]. J'ajouterai seulement ici, d'après mes expériences sur la durée des oscillations des colonnes liquides et sur les diverses machines de ce genre que j'ai essayées, que les périodes se succéderont dans les deux cas assez rapidement pour que, sans dépasser des dimensions exécutables, ces appareils puissent fournir le volume d'air suffisant pour les exploitations qui se présentent le plus fréquemment. Il n'est pas indispensable de répéter sur ces durées ce que j'ai dit dans mes précédents Mémoires, et il est d'ailleurs évident qu'elles pourront encore être diminuées par la résistance de l'air qui se comprime, puisque plus une pression moyenne est grande, moins elle est de temps à engendrer une quantité de mouvement donnée et *vice versâ*.

» On ne peut se dissimuler que l'air sera un peu mouillé par la colonne liquide, mais on remédiera en grande partie à cet inconvénient au moyen d'un disque flotteur, alternativement soulevé par la colonne liquide, et qui, à cause de sa petite masse, pourra évidemment être disposé de manière à ne pas offrir d'inconvénients sérieux.

» Il me reste à dire quelque chose de la manière dont l'eau se dégorge à sa sortie de la soupape annulaire. Il faut dans toutes les machines

---

[*] « En général, on sera toujours plus sûr de ne pas se tromper dans ses calculs, quand on évitera de trop compter sur la détente, quand l'air atmosphérique doit rentrer à une époque donnée, parce que cette détente occasionnera des différences dans la densité de la masse fluide soumise à ce phénomène. »

hydrauliques une certaine partie de chute pour se débarrasser de l'eau motrice, par la raison même qu'elle ne doit s'échapper qu'avec de petites vitesses, ce qui occasionnera nécessairement des intumescences. C'est ce genre de perte de force vive qui était l'objet spécial de mon dernier Mémoire. (Il s'agissait d'un Mémoire sur les ondes présenté en 1844.) Je ne crois donc pas nécessaire de m'étendre aujourd'hui sur ce sujet. Je remarquerai seulement que plus la profondeur de l'eau dans le bief inférieur sera grande, plus la section de chasse sera grande, et plus, par conséquent, les vitesses seront petites dans cette décharge, ce qui diminuera l'importance des ondes.

Conclusions.

» La machine soufflante dont je viens de donner une idée succincte n'éprouvant nécessairement aucune percussion brusque un peu notable, et pouvant être, par conséquent, exécutée dans de grandes dimensions, il résulte de mes diverses expériences sur les colonnes liquides oscillantes d'un grand diamètre que le travail en résistances passives sera peu de chose par rapport au travail moteur. Il est de plus essentiel d'observer qu'il n'y aura qu'un seul déchet total à considérer, tandis qu'il y en aurait deux, si une machine soufflante quelconque, telle, par exemple, qu'un ventilateur, était mue par une première machine telle qu'une roue, de sorte que l'effet utile définitif ne serait que le produit de deux fractions.

» Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'il sera bon de construire deux machines, afin que la densité de l'air soit plus constante dans le réservoir.

» Ce système substitue DES COLONNES LIQUIDES aux pistons soufflants.

» ... Il est d'ailleurs à remarquer que les moyens à employer pour fermer la soupape ont bien moins d'importance qu'on n'est porté à le croire au premier aperçu. Quand même on serait dans la pratique obligé de la faire fonctionner au moyen d'une cataracte *ou de tout autre système analogue*, la quantité d'eau que cela ferait débiter sans utilité directe pour le travail serait très-peu de chose par rapport aux masses d'eau débitées par le tuyau, supposé toujours d'un grand diamètre. C'était même de cette manière que j'avais d'abord fait le cal-

cul, quand je discutai pour la première fois cette invention avec plusieurs ingénieurs civils.

» Je n'entre pas ici dans le détail des proportions de l'appareil; cela n'offrirait rien de bien nouveau, après ce que j'ai développé sur les oscillations de ces grandes colonnes dans mes précédents Mémoires. Mon but, en ce moment, est de bien faire connaître les discussions sur les dimensions des diverses parties, lorsque ce sujet aura été mieux éclairci, quant à ses détails secondaires, par des expériences assez en grand.

» Il est à peine nécessaire d'ajouter que, si l'on emploie une cataracte, il n'y a point à s'embarrasser du retour de la colonne jusqu'à la soupape, quand les circonstances permettront de donner au tuyau horizontal une assez grande longueur, et que, par suite, on débitera une quantité d'eau considérable par rapport au volume du tuyau d'ascension, on pourra simplifier et accélérer le jeu de cette période en vidant tout simplement ce tuyau, dont l'eau tombera dans le bief inférieur étant suivie par l'air des clapets. »

La figure ne devant pas être reproduite dans ce journal, où il ne s'agit que d'exposer le principe, on ne donne pas non plus la légende, conservant ces détails pour des recueils spéciaux. Il est d'ailleurs essentiel de ne reproduire que textuellement, et *sans aucune modification*, ce qui est relatif à ce manuscrit déjà ancien, parce que je m'appuierais sur son texte dans le cas où il y aurait une question de priorité.

Réflexions sur ce Mémoire inédit, simplifications résultant des phénomènes nouveaux décrits dans le tome VII, 2e série, *utilité de ces détails inédits pour l'industrie et pour l'histoire de l'hydraulique.*

J'ai trouvé des phénomènes qui permettent de simplifier le jeu de la vanne cylindrique ou soupape de Cornwall, sans employer la percussion de l'eau, de sorte que le système diffère encore plus du bélier hydraulique. Ces phénomènes ont été exposés dans un Mémoire que j'ai publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1862, t. VII, 2e série, p. 169 à 200, à la fin duquel j'ai dit quelques mots de cette machine soufflante.

Le Mémoire inédit que je viens de transcrire m'a paru très-utile, même encore aujourd'hui, pour bien montrer le développement de l'idée fondamentale, abstraction faite des moyens les plus simples de faire fonctionner la vanne cylindrique ou la soupape de Cornwall.

Quoique je n'aie pas reproduit la figure, parcequ'il y a peu de figures de ce genre dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, j'ai cru devoir reproduire tout le manuscrit, sauf ce qui est relatif à la légende, sans chercher à dissimuler quelques légers défauts de rédaction ou de détail, qui même font aujourd'hui mieux ressortir encore tout l'avantage pratique des phénomènes nouveaux de succion que j'ai trouvés depuis la présentation de ce Mémoire, et sur lesquels j'ai fait des expériences très-en grand, dont j'ai parlé dans mes Mémoires précédents, notamment dans celui de 1862 et dans celui qui a pour objet un de mes systèmes d'écluses de navigation. Une *addition* à ce dernier Mémoire est spécialement consacrée aux phénomènes dont il s'agit; je parle aussi d'un phénomène différent, qui peut être appliqué quand on veut à un *soulèvement*, dans ma Note sur des machines pour les épuisements, publiée aussi dans le tome XI, 2e série.

Des Extraits du manuscrit que je viens de transcrire ont été publiés dans le volume de l'Académie des Sciences de Turin pour l'année 1859, dans mon Mémoire intitulé : *Notice historique et critique sur les machines à compression d'air du Mont-Cenis*.

Deux pages d'extrait officiel, publiées par M. Arago dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, avaient été réproduites dans la *Revue universelle de Liége*, année 1859, cahier de mars et avril, par M. de Cuyper, professeur de Mécanique à l'Université de Liége, inspecteur des études à l'École des Mines de Belgique, etc., dans un Mémoire où il défend mes droits de priorité aux compresseurs à colonnes liquides oscillantes fonctionnant sur le versant italien du Mont-Cenis.

Comme je parlerai dans un autre Mémoire des compresseurs à colonnes oscillantes du tunnel des Alpes, il est essentiel de remarquer, pour éviter tout malentendu, qu'il ne s'agit que des machines soufflantes dans le Mémoire manuscrit que je viens de transcrire. Je reviendrai dans un autre Mémoire sur les compresseurs proprement dits, ayant le premier exposé deux principes bien distincts. Dans l'un, la

force vive s'emmagasine comme pour le bélier hydraulique par un écoulement à l'extérieur; dans l'autre, elle s'emmagasine seulement à l'intérieur du système. Mais dans l'un et l'autre cas une colonne liquide est substituée aux pistons qui comprimaient l'air au moyen des anciennes machines. Il est vrai que l'air était comprimé dans la machine de Schemnitz, mais on n'y employait pas sensiblement la force vive de la colonne liquide.

Ce qui précède m'a paru d'ailleurs très-utile pour éclairer plus spécialement, et abstraction faite de toute question de priorité, les vrais principes du système considéré au point de vue des machines soufflantes.

On y voit d'ailleurs comment, même avant des expériences directes, j'avais pu rassurer sur le genre de perte de force vive, qui, au premier aperçu, semblait pouvoir résulter de la possibilité de mouvements intérieurs dans la colonne d'air comprimé.

Quant au *modérateur hydraulique* décrit dans ce Mémoire, je n'y vois plus aujourd'hui d'application directe au jeu de ces grandes vannes cylindriques ou soupapes de Cornwall, excepté peut-être pour des pièces de dimensions énormes. Mais en général l'expérience a montré qu'elles étaient faciles à manœuvrer, même sans cataracte, au moyen de divers phénomènes de succion, que j'ai trouvés depuis. Cependant il est intéressant de conserver la trace de ce modérateur, non-seulement à cause des applications qu'il pourra avoir dans l'industrie, mais à cause du principe, qui est d'ailleurs celui d'une des pompes à flotteur décrites dans une de mes Notes publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 2e série.

On peut voir, dans mon Mémoire précité de 1862, comment les espèces de vannes cylindriques ou de soupapes de Cornwall, dont il s'agit pour les machines soufflantes, peuvent fonctionner, étant alternativement attirées de haut en bas par de puissants phénomènes de succion. Il ne paraît pas, d'après mes expériences très en grand, qu'il fût bien utile de les fermer en les levant, selon ce qui a été exposé dans le Mémoire inédit d'après un conseil qui m'avait été donné.

Détails inédits sur une expérience de Montgolfier mentionnée dans le Journal de l'École Polytechnique.

Longtemps après avoir trouvé les principes précédents, j'ai pensé qu'il pourrait être utile d'essayer de recueillir tout ce que Montgolfier aurait pu avoir dit, même verbalement, sur la possibilité de se servir du bélier hydraulique pour obtenir une machine soufflante ou à comprimer de l'air. Je me suis donc adressé directement à M. Seguin, Membre correspondant de l'Institut, neveu de Montgolfier.

Dans une lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire le 25 janvier 1860, il s'est exprimé ainsi relativement à cette question. «.... Je puis vous » dire, je crois en pleine connaissance de cause, que la seule et unique » idée de mon oncle Montgolfier en inventant le bélier hydraulique, » a été de donner aux arts et à l'agriculture un moyen d'employer di- » rectement, et le plus efficacement possible, la force développée par » la chute de l'eau, à l'élévation d'une partie de cette même eau à des » hauteurs indéfinies.

» Le bélier hydraulique ne fut pour mon oncle qu'une application » partielle d'un principe que lui avait révélé son vaste et immense » génie, savoir que le mouvement a une existence aussi réelle que la » matière, qu'il ne peut être ni créé ni annihilé, et, qu'une fois produit, » il se perpétue indéfiniment jusqu'à ce que les causes qui lui avaient » donné naissance se reproduisent en sens inverse, de manière à ra- » mener les corps qu'il avait affectés d'abord, à l'état de repos.

» J'ai vu dans des expériences faites vers l'année mil huit cent, rue des » Juifs, n° 18, au Marais, où mon oncle était logé alors, la tension du » réservoir d'air destiné à régulariser la pression sur la nappe d'eau, » qui communiquait au tuyau d'ascension, s'élever jusqu'à une pres- » sion représentée par quarante-deux atmosphères, ce qui eût suffi » pour élever l'eau à plus de quatre cents mètres de hauteur. Mais je » ne lui ai jamais entendu dire qu'il eût eu l'intention de l'appliquer, » ni à des machines soufflantes, ni à des machines de compression.

» Je désire, Monsieur, que ces renseignements puissent remplir l'ob- » jet que vous vous êtes proposé en me faisant l'honneur de vous » adresser à moi..... »

La rue des Juifs étant loin de tous les quartiers élevés de Paris, j'ai cru pouvoir en conclure que l'expérience mentionnée dans la lettre de M. Seguin, et dont Montgolfier avait dit lui-même quelques mots, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, avril 1808, 14e cahier, p. 297, avait pour objet la compression de l'air dans une cloche, qui n'élevait pas d'eau. J'ai donc cru devoir demander à M. Seguin quelques explications à ce sujet.

Il m'a fait l'honneur de m'envoyer un croquis de cet appareil dans une lettre du 27 octobre 1860. Il s'agissait d'un bélier hydraulique ordinaire, dont, en effet, on bouchait d'abord avec un robinet le tuyau d'ascension, quand on voulait expérimenter sur ces pressions élevées. La cloche était, me dit-il, en cristal; elle pouvait avoir quarante à cinquante centimètres de hauteur, dix à douze centimètres de diamètre et un centimètre d'épaisseur.

On faisait jouer le bélier jusqu'à ce qu'un manomètre disposé à l'intérieur même de la cloche en cristal, servant de récipient, indiquât une pression de quarante atmosphères; et à mesure qu'on approchait de ce terme, on faisait éloigner les femmes et les enfants en prévenant les curieux du danger auquel ils s'exposaient en assistant à l'expérience. Les deux extrémités supérieure et inférieure de la cloche étaient retenues par deux plaques en fer, qui la serraient fortement au moyen de boulons.

D'après les détails qui précèdent, Montgolfier avait exécuté une machine à comprimer de l'air, qui a fonctionné sans élever de l'eau. Mais il est certain que dans l'état ou était alors la science, il n'a point pensé à proposer une machine ayant pour but de comprimer ou de souffler de l'air sur une grande échelle, de manière, en un mot, que le résultat pût être appliqué à l'*industrie*, comme on l'entend aujourd'hui.

Ce qui a complétement changé l'état de la question, c'est l'application que j'ai proposé des vannes cylindriques ou des soupapes de Cornwall aux machines hydrauliques de ce genre.

J'ai montré le premier d'immenses colonnes liquides fonctionnant par ce moyen, *même dans des enveloppes fragiles,* sans aucun coup de bélier possible, parce que les *sections transversales ne sont jamais bouchées*. Je suis d'ailleurs le premier qui pour ces grandes colonnes

liquides ait signalé le principe auquel j'ai donné le nom de *principe des vitesses continues*.

Je reviendrai dans un autre Mémoire sur la forme du système appliquée au tunnel des Alpes, c'est-à-dire sur l'idée que j'ai proposée aussi le premier de laisser la force vive de la colonne comprimante se développer seulement à l'intérieur du système.

Considérations théoriques sur cet appareil.

Depuis que ce qui précède est écrit, j'ai eu occasion de faire des expériences nouvelles sur l'appareil à tube oscillant considéré comme machine à élever de l'eau. Il en est résulté des conséquences sur les proportions à donner à ce système considéré comme machine soufflante.

Il est intéressant d'ailleurs de faire remarquer qu'une partie de l'augmentation de l'effet utile obtenu dans ces dernières expériences provient de ce que la rondelle en caoutchouc n'était pas clouée. Il n'était pas même nécessaire, dans les limites où elle a été employée, qu'elle fût encastrée. Elle montait et descendait librement entre le siége fixe et le tube mobile. Mais je reviendrai sur ce sujet dans un autre Mémoire.

Je remarquerai seulement ici qu'il n'est pas nécessaire pour un bon effet utile d'élever autant d'eau à chaque période qu'on l'avait cru jusqu'à présent. J'ai repris l'étude de la question à ce point de vue au moyen du calcul différentiel.

J'ai été conduit à une équation du troisième degré sur laquelle je donnerai ultérieurement des développements reposant sur l'étude des diverses parties des résistances passives. Il suffit de dire ici que, dès à présent, elle rend assez bien compte des proportions qui doivent être gardées entre les quantités d'eau élevée et les dimensions de l'appareil, pour qu'il soit utile d'indiquer les considérations suivantes :

Dans les machines soufflantes on ne comprime ordinairement l'air qu'à des tensions assez faibles. Il semble donc, au premier aperçu, qu'on a seulement à se préoccuper de voir si l'effet utile serait convenable dans le cas où le travail recueilli à chaque période serait généralement assez faible.

C'est en effet ce qui se présentera relativement quand les chutes mo-

trices atteindront certaines limites. Mais il est intéressant de remarquer que, pour les chutes motrices moindres, dans le cas par exemple où la tension de l'air doit être analogue à celle qui résulterait d'une pression hydrostatique d'un mètre de hauteur d'eau, si l'on comprimait toute la quantité d'air contenue dans le tuyau vertical entre le bief d'aval et le sommet de la chambre de compression, surtout si toute cette colonne devait être refoulée dans le récipient, on arriverait à recueillir une quantité de travail qui se trouverait être trop grande à chaque période pour un bon effet utile. On serait obligé de dépenser trop d'eau motrice à chaque période.

Mais on peut obvier à cet inconvénient en ne comprimant qu'une partie de la colonne d'air dont il s'agit, ce qui est facile, si l'on permet à l'air de s'échapper à l'extérieur, pendant une partie de l'ascension de la colonne liquide, au moyen d'un orifice latéral, qui sera alternativement bouché par une soupape. Celle-ci pourra fonctionner d'une manière analogue à ce qui s'est présenté dans un de mes premiers appareils à colonne liquide oscillante considérée d'abord comme élévatoire, que j'ai fait fonctionner à l'École des Mines en 1837, en présence d'une Commission de l'Institut, et que j'ai proposé depuis à la Société Philomathique (voir le *Bulletin* du 8 août 1846) de transformer en machine soufflante ou à compression d'air. MM. Combes et Séguier ont assisté en 1837 à cette expérience.

Dans l'appareil que je rappelle, l'orifice latéral dont il s'agit était alternativement bouché par un flotteur faisant fonction de soupape alternativement soulevée par la colonne liquide ascendante. On conçoit que, si cet appareil est employé à comprimer de l'air, on peut disposer un orifice latéral analogue à la hauteur convenable pour que la colonne d'air restée au-dessus soit comprimée à la tension demandée, mais de manière que le travail employé à la compression de l'air pour chaque période soit réglé de façon à remplir les conditions nécessaires pour le maximum d'effet, ainsi que cela résulte des considérations théoriques dont j'ai seulement dit quelques mots ci-dessus. Je les développerai ultérieurement par l'étude des phénomènes, qui d'ailleurs sont déjà assez connus pour qu'on puisse en apprécier convenablement l'influence, et sur lesquels je vais donner provisoirement quelques détails nouveaux.

Les phénomènes de succion sur lesquels repose le jeu automatique de mon appareil à tube oscillant considéré comme machine à élever de l'eau au moyen d'une chute d'eau, objet d'un Mémoire publié dans ce Journal en 1862, t. VII, 2e série, sont beaucoup plus nouveaux et plus compliqués que ceux sur lesquels repose le jeu automatique de mon moteur hydraulique à flotteur oscillant, objet d'un Mémoire publié aussi dans ce Journal en 1847, t. XII, 1re série.

Il paraissait d'abord en résulter que l'effet utile de cet appareil élévatoire atteindrait difficilement celui de ce moteur. Mais les études nouvelles que je viens de faire sur ce sujet changent l'état de la question, parce que l'incertitude sur le mode d'action du phénomène avait principalement pour objet ce qui se présente dans les grandes levées du tube oscillant. Or, il résulte de mes dernières expériences que les petites levées de ce tube sont souvent plus convenables qu'on ne pouvait l'espérer, parce qu'il n'est pas nécessaire d'élever à chaque période autant d'eau qu'on devait le croire au premier aperçu.

Il était naturel de craindre une perte trop notable de force vive, si l'orifice, résultant de la levée alternative de ce tube, était d'une assez petite section. Mais en définitive cette perte, provenant du degré de vitesse de sortie de l'eau, comme il faut une vitesse donnée pour produire la succion suffisante au jeu automatique, on conçoit déjà que, si l'on ne laisse pas la vitesse dépasser une certaine limite, la perte de force vive résultant de cette vitesse de sortie sera limitée par rapport à la chute; d'autant plus qu'il résulte d'expériences directes, que, pour les petites levées, une vitesse donnée occasionne une succion plus forte que pour les grandes levées d'un même tube mobile, toutes choses égales d'ailleurs.

On conçoit donc déjà combien l'état de la question est changé par la possibilité de limiter plus qu'on ne le savait la quantité d'eau élevée à chaque période, puisque cela permet de diminuer la levée du tube mobile. Il en est ainsi, à plus forte raison, si, comme l'indique le résultat obtenu par le calcul différentiel, il doit y avoir de l'avantage à diminuer ainsi cette quantité dans de justes proportions, dont on a déjà une idée suffisante pour éclairer la pratique.

Mais cette première conséquence étant obtenue, il est utile de rappeler un phénomène qui permettra de mieux préciser encore l'état de

la question. En effet, si l'essentiel, quant à l'étranglement de sortie, paraît être en général de ménager par la levée du tube mobile une section analogue à celle du tuyau de conduite fixe, il est intéressant de remarquer, d'après des observations que tout le monde peut répéter facilement sur les décharges latérales des canaux qui amènent l'eau sur les roues hydrauliques des moulins dans beaucoup de localités du département de Seine-et-Oise, qu'il se produit dans ces décharges latérales un phénomène de *contraction* de la veine liquide qui diminue beaucoup la véritable section d'écoulement. Cette diminution dépend de circonstances locales que je me propose d'étudier plus spécialement. Mais c'est surtout dans la seconde moitié de la section de l'orifice que se fait l'écoulement (*voir* le tome XV, 1re série, de ce Journal).

On peut provisoirement admettre qu'il est rationnel de diminuer de moitié la levée du tube mobile qui donnerait une section égale à celle du tuyau de conduite fixe.

Les essais directs faits sur l'appareil ne sont pas contraires à cette prévision théorique. Quant à l'étude des très-grandes levées, je reviendrai sur ce sujet après de nouvelles expériences, parce qu'on s'est aperçu, en démontant l'appareil d'essai, que des causes d'étranglements considérables y avaient été introduites pendant mon absence, de sorte qu'il y aura lieu de recommencer toute cette nouvelle série d'expériences, même quant à l'appréciation de l'effet utile. Mais les résultats obtenus malgré cette circonstance changent notablement l'état de la question.

Déjà l'effet utile en eau élevée paraît dépasser sensiblement soixante pour cent de la quantité de travail moteur dépensé, tandis que dans le Mémoire précité de 1862, je n'osais annoncer qu'un effet utile de cinquante pour cent : on obtiendra probablement soixante-dix avec une construction plus soignée.

Le Jury international de l'Exposition universelle de 1867 m'a décerné une médaille d'argent surtout à l'occasion de ces nouvelles expériences. Il est peut-être convenable d'attendre la publication du Rapport avant de rendre compte de tous les détails des expériences faites par la Commission, qui admet je crois, un effet utile moyen ayant peu différé de soixante pour cent.

SUR LA

PROPAGATION ET LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE DANS LES CRISTAUX;

PAR M. ÉMILE SARRAU,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

SECOND MÉMOIRE.

Nous avons montré, dans un premier Mémoire inséré dans ce Journal, comment l'étude analytique des phénomènes lumineux dépend de trois fonctions symboliques à coefficients périodiques dont il importe de déterminer la forme essentielle pour réduire les équations auxiliaires. Ces fonctions, désignées par F, G, H dans le Mémoire précité, représentent les composantes de la force accélératrice appliquée à un point quelconque de l'éther : leur expression dépend nécessairement des idées admises sur la constitution de l'éther, et ce second Mémoire a pour objet l'examen des résultats qu'introduit une hypothèse particulière dont les conséquences paraissent conformes aux faits observés.

Cette hypothèse est développée dans les Chapitres II et III. Elle revient à supposer que, dans les milieux matériels comme dans le vide, l'éther est *isotrope* et que la seule modification introduite par l'action de la matière pondérable consiste dans une altération périodique de la densité.

Les Chapitres IV et V sont consacrés à l'étude des propriétés des ondes planes propagées par les cristaux des divers systèmes déduites des équations obtenues dans les Chapitres précédents.

Nous avons cru utile de rappeler brièvement dans le premier Chapitre la méthode générale qui a été appliquée par Cauchy à l'étude des mouvements simples, afin de fixer les notations qui sont constam-

ment employées dans ce travail. Nous indiquons à cette occasion une règle fort simple pour déterminer les éléments d'une vibration elliptique.

CHAPITRE PREMIER.

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES. — DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UNE ONDE POLARISÉE ELLIPTIQUEMENT.

1. Soit en général un système d'équations auxiliaires de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = L_1 u + L_2 v + L_3 w, \\ D_t^2 v = M_1 u + M_2 v + M_3 w, \\ D_t^2 w = N_1 u + N_2 v + N_3 w, \end{cases}$$

les L, M, N étant des fonctions symboliques entières, à coefficients constants, de D_x, D_y, D_z ; on a un système d'intégrales particulières, en posant

$$(2)\qquad \frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

P, Q, R ; α, β, γ, σ étant des constantes, réelles ou imaginaires, satisfaisant aux équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma^2 P = A_1 P + A_2 Q + A_3 R, \\ \sigma^2 Q = B_1 P + B_2 Q + B_3 R, \\ \sigma^2 R = C_1 P + C_2 Q + C_3 R, \end{cases}$$

où les A, B, C représentent les résultats obtenus en écrivant α, β, γ au lieu de D_x, D_y, D_z dans les L, M, N des équations (1). En éliminant P, Q, R entre les équations (3) on a une équation *caractéristique*

$$(4)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma) = 0.$$

Enfin, on déduit des mêmes équations les rapports de deux des constantes P, Q, R à la troisième.

2. On sait que tout système d'intrégales des équations (1) s'obtient

en combinant par addition un nombre fini ou infini d'intégrales *simples* de la forme (1). Il est aisé d'en conclure que tout mouvement du système peut être considéré comme résultant de la composition d'un nombre fini ou infini de mouvements dans lesquels les déplacements sont les parties réelles d'un système d'intégrales simples. De la seule considération de ces mouvements *simples,* on peut déduire, comme l'a fait Cauchy, les propriétés générales des vibrations.

3. Supposons les coordonnées rectangulaires, et soit généralement

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha = a' + ai, \quad \beta = b' + bi, \quad \gamma = c' + ci, \quad \sigma = s' + si, \\ \mathrm{P} = pe^{\lambda i}, \quad \mathrm{Q} = qe^{\mu i}, \quad \mathrm{R} = re^{\nu i}. \end{cases}$$

Désignons de plus par ρ et ρ' les distances du point x, y, z aux plans ayant pour équations

$$(6)\qquad a\,\mathrm{X} + b\,\mathrm{Y} + c\,\mathrm{Z} = 0,$$

$$(7)\qquad a'\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + c'\mathrm{Z} = 0,$$

il est aisé de voir que les déplacements du mouvement simple correspondant aux intégrales (2) sont

$$(8)\quad \begin{cases} \overline{u} = pe^{h'\rho' - s't}\cos(h\rho - st + \lambda), \\ \overline{v} = qe^{h'\rho' - s't}\cos(h\rho - st + \mu), \\ \overline{w} = re^{h'\rho' - s't}\cos(h\rho - st + \nu), \end{cases}$$

h et h' étant déterminés par les formules

$$(9)\qquad h^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad h'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Les formules (8) représentent un mouvement par *ondes planes* parallèles au plan fixe (6). Les valeurs absolues de $\frac{2\pi}{h}$ et $\frac{2\pi}{s}$ donnent la *longueur d'ondulation* et la *durée de la vibration*. La *vitesse de propagation* des ondes planes est fournie par le rapport $\omega = \frac{s}{h}\cdot$ Les quantités h' et s' sont des *coefficients d'extinction*. Quand h' n'est pas nul, l'am-

plitude des déplacements décroît en progression géométrique quand on s'éloigne d'un certain côté du plan représenté par l'équation (7). Quand s' est positif, le mouvement s'éteint pour des valeurs croissantes du temps; si $s' = 0$, l'amplitude est constante en chaque point et le mouvement est dit *persistant*.

4. Nous ne considérons dans ce qui suit que des mouvements simples persistants : dans ce cas, on déduit aisément des formules (8) les deux équations

$$(10) \qquad \frac{\overline{u}}{p}\sin(\mu - \nu) + \frac{\overline{v}}{q}\sin(\nu - \lambda) + \frac{\overline{w}}{q}\sin(\lambda - \mu) = 0,$$

$$(11) \qquad \left(\frac{\overline{v}}{q}\right)^2 - 2\,\frac{\overline{v}}{q}\,\frac{\overline{w}}{r}\cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\overline{w}}{r}\right)^2 = e^{2h'\rho'}\sin^2(\mu - \nu),$$

qui montrent que les trajectoires atomiques sont généralement elliptiques. Si $h' = 0$ toutes les ellipses sont égales; si h' n'est pas nul, les points à égale distance du plan (7) ont des trajectoires égales.

Les ellipses peuvent se réduire à des cercles ou à des drdites. Suivant les cas, la *polarisation* du mouvement simple est *elliptique*, *circulaire* ou *rectiligne*.

5. Problème. — *Déterminer la grandeur et la direction des axes principaux des trajectoires elliptiques dans un mouvement simple persistant.*

Les déplacements $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sont les parties réelles des valeurs (2) de u, v, w, qui, en posant $s' = 0$ et $h\rho - st = \varphi$, deviennent

$$(12) \qquad u = \mathrm{P}e^{h'\rho' + \varphi i}, \quad v = \mathrm{Q}e^{h'\rho' + \varphi i}, \quad w = \mathrm{R}e^{h'\rho' + \varphi i};$$

par suite, en désignant par $\mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0, \mathrm{R}_0$ les imaginaires conjuguées de P, Q, R, on aura

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\overline{u} = e^{h'\rho'}(\mathrm{P}e^{\varphi i} + \mathrm{P}_0 e^{-\varphi i}), \\ 2\overline{v} = e^{h'\rho'}(\mathrm{Q}e^{\varphi i} + \mathrm{Q}_0 e^{-\varphi i}), \\ 2\overline{w} = e^{h'\rho'}(\mathrm{R}e^{\varphi i} + \mathrm{R}_0 e^{-\varphi i}). \end{cases}$$

A l'aide de ces valeurs, et en posant

(14) $$Me^{\theta i} = e^{2h'\rho'}(P^2 + Q^2 + R^2),$$

(15) $$I = e^{2h'\rho'}(p^2 + q^2 + r^2),$$

on trouve aisément que la distance δ, qui sépare un point quelconque de sa position d'équilibre, est déterminée par la formule

(16) $$2\delta^2 = I + M\cos(2\varphi + \theta),$$

de sorte que le maximum et le minimum de δ s'obtiennent en posant $2\varphi + \theta = 0$ et $2\varphi + \theta = \pi$, et se déduisent de la relation

(17) $$2\delta^2 = I \pm M.$$

Pour le grand axe, on a $\varphi = -\frac{\theta}{2}$, et les projections de demi-grand axe sont les parties réelles des valeurs correspondantes de u, v, w, qui sont, d'après les formules (12),

(18) $$u = Pe^{h'\rho'}e^{-\frac{\theta}{2}i}, \quad v = Qe^{h'\rho'}e^{-\frac{\theta}{2}i}, \quad w = Re^{h'\rho'}e^{-\frac{\theta}{2}i}.$$

Pour le petit axe, on a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}:$$

par suite, les projections du demi-petit axe sont les parties réelles de trois imaginaires obtenues en multipliant les précédentes par $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, c'est-à-dire les *coefficients des parties imaginaires* des expressions (18).

Les formules (17) et (18) ramènent la solution du problème à la détermination du module et de l'argument de la forme imaginaire

$$A = P^2 + Q^2 + R^2.$$

Quand le mouvement se propage sans s'affaiblir, on a $h' = 0$, et on déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Dans tout mouvement simple polarisé elliptiquement, représenté par

les intégrales (2), *les demi-axes principaux des trajectoires sont donnés par la formule* $\delta^2 = \frac{1}{2}(I \pm M)$, *dans laquelle* I *désigne* l'intensité *du mouvement vibratoire, et* M *le module de l'expression*

$$A = P^2 + Q^2 + R^2.$$

De plus, les projections sur les trois axes coordonnés du demi-grand axe (et du demi-petit axe) sont représentées par les parties réelles (et les coefficients de i*) des trois imaginaires que l'on obtient en multipliant les constantes* P, Q, R *par* $\left(\frac{M}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. *Polarisation circulaire.* — Pour qu'un mouvement persistant soit polarisé circulairement, il faut et il suffit que les deux valeurs (17) de δ soit égales, et, par suite, que M soit nul; on doit donc avoir

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 0.$$

7. *Polarisation rectiligne.* — Pour que la polarisation soit rectiligne, il faut et il suffit que les valeurs des déplacements soient, quel que soit φ, proportionnelles à des constantes réelles. Il faut donc que les rapports de deux des quantités P, Q, R à la troisième soient réels.

8. Nous terminerons ce qui est relatif à la polarisation des mouvements simples par une remarque sur le sens dans lequel s'effectuent les vibrations non rectilignes.

Nous appellerons *direct* le mouvement d'un point se mouvant sur les plans coordonnés de oy vers oz, de oz vers ox, ou de ox vers oy. Cela posé, si on considère un mouvement simple projeté sur le plan xoy, les équations de ce mouvement seront

$$\bar{u} = pe^{h'\rho'} \cos(h\rho - st + \lambda),$$
$$\bar{v} = qe^{h'\rho'} \cos(h\rho - st + \mu).$$

Soit φ l'angle (croissant dans le sens direct) que fait avec ox la pro-

jection ε du rayon vecteur. De la relation $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\bar v}{\bar u}$, on déduit

$$\varepsilon^2 \frac{d\varphi}{dt} = spqe^{2h'\rho'} \sin(\mu - \lambda).$$

Donc, le sens du mouvement projeté est direct ou rétrograde suivant que $\sin(\mu - \lambda)$ est positif ou négatif, ou, ce qui revient au même, suivant que le coefficient de i, dans le rapport $\frac{Q}{P}$, est positif ou négatif.

9. On voit par ce qui précède comment toutes les particularités relatives à la *polarisation* d'un mouvement simple se déduisent des valeurs des constantes P, Q, R, auxquelles sont proportionnelles les intégrales simples correspondantes. C'est de l'équation caractéristique (4) que résultent les lois de la *propagation* du mouvement.

En effet, cette équation détermine en général la *longueur d'ondulation* et le *coefficient d'extinction* d'une onde plane persistante qui se propage dans une direction donnée, et s'éteint à partir d'un plan déterminé.

Soient effectivement (l, m, n) et (l', m', n') les cosinus des angles que les normales aux plans (6) et (7) font avec les axes. On aura, en conservant les notations des formules (5) et (9),

$$\alpha = h'l' + hli, \quad \beta = h'm' + hmi, \quad \gamma = h'n' + hni, \quad \sigma = si,$$

et l'équation caractéristique devient

$$\text{(19)} \qquad F(h'l' + hli,\ h'm' + hmi,\ h'n' + hni,\ si) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est imaginaire de la forme $X + Yi$, et le système simultané $X = 0$, $Y = 0$, résolu par rapport à h et h', devra présenter une solution réelle, si la propagation d'une onde plane évanescente dans la direction donnée est compatible avec la constitution du milieu que l'on considère; h' fournit le coefficient d'extinction, et la longueur d'ondulation s'obtient en divisant 2π par h.

Si une onde plane peut se propager sans affaiblissement dans une direction donnée, la valeur correspondante de h doit être une racine

réelle de l'équation

$$F(hli,\ hmi,\ hni,\ \sigma i) = 0. \tag{20}$$

10. Lorsque le plan des ondes coïncide avec le plan d'extinction, on a $l' = l$, $m' = m$, $n' = n$, et en posant $h' + hi = k$, $si = \sigma$, l'équation (19) devient

$$F(kl,\ km,\ kn,\ \sigma) = 0. \tag{21}$$

Dans ce cas, si on résout l'équation par rapport à k, toute racine dépourvue de partie réelle correspond à un mouvement simple non évanescent. De sorte que l'onde ne s'éteint pas, ou s'éteint, suivant que le rapport $\frac{k}{\sigma}$ est réel ou imaginaire.

La substitution de l'équation (21) à l'équation (19) simplifie notablement la discussion de l'équation caractéristique, et suffit à l'étude des propriétés essentielles des vibrations lumineuses propagées par les cristaux. Le cas particulier auquel elle se rapporte se réalise pour les ondes réfractées qui se propagent dans un cristal imparfaitement transparent, quand les ondes incidentes sont parallèles à la face réfringente du cristal.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES DE L'ÉTHER D'APRÈS L'HYPOTHÈSE QUI ASSIMILE CE MILIEU A UN SYSTÈME PÉRIODIQUEMENT ISOTROPE.

1. L'analyse qui fait l'objet de ce Chapitre est basée sur les hypothèses suivantes :

1° L'éther peut être assimilé à un système de points s'attirant ou se repoussant. L'action mutuelle de deux points, dirigée suivant la ligne qui les joint, est une fonction de la distance qui s'évanouit dès que la variable dont elle dépend dépasse une limite très-petite;

2° La sphère d'activité de chaque point de l'éther renferme un nombre extrêmement grand d'atomes distribués sans régularité;

3° La densité de l'éther renfermé dans un cristal est sensiblement constante dans l'étendue de la sphère d'action d'un de ses points.

Pour légitimer cette dernière supposition, il suffit d'admettre que le rayon de la sphère d'action est très-petit par rapport aux dimensions d'un parallélipède élémentaire de l'assemblage des molécules matérielles. En effet, la densité de l'éther en un point quelconque peut être considérée comme une fonction continue des coordonnées qui fixent la position de ce point dans l'intérieur d'une alvéole de l'assemblage moléculaire. Si on passe de ce point à un autre compris dans sa sphère d'action, les coordonnées varient, dans l'hypothèse adoptée, de quantités très-petites par rapport à elles-mêmes, et la densité reçoit un accroissement du même ordre, qui peut être négligé dans le calcul de certains termes.

2. En se basant sur ces hypothèses, on est conduit à des équations identiques à celles que l'on obtiendrait en supposant que la constitution de l'éther est la même, dans tous les sens, autour de chaque point.

Leur forme est la même que celle des équations auxquelles satisfont les vibrations d'un milieu homogène et isotrope; seulement, les coefficients sont alors des fonctions périodiques des coordonnées.

Les hypothèses admises reviennent donc à considérer l'éther renfermé dans un cristal comme constituant un système *périodiquement isotrope*.

3. Ce résultat paraîtra d'ailleurs fort naturel si on observe qu'un système de *points* doit être parfaitement mobile, à la manière des *fluides* pondérables dont les molécules sont sphériques, ou sont du moins assez éloignées les unes des autres pour que leur forme n'ait aucune influence sensible sur leur action mutuelle. En vertu de cette mobilité parfaite, les forces extérieures au système doivent disposer les points de manière que leur intervalle moyen soit le même autour d'un point, dans toutes les directions.

La cause particulière qui, dans les corps cristallisés ou non, retient les molécules sur les directions où elles sont plus ou moins resserrées ne peut être, suivant une remarque de Poisson [*], que la partie de leur action qui dépend de leur forme et de leur situation relatives.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXe cahier, p. 93.

Si donc on considère l'éther comme un système de points, l'état statique qu'il présente dans l'intérieur d'un corps pondérable doit être assimilé, non à la constitution d'un corps cristallisé ou d'un solide homogène déformé, mais à celle d'un *fluide* soumis à des forces extérieures. Tel serait, par exemple, un gaz magnétique répandu dans un système de petits aimants distribués périodiquement.

Il y a donc lieu de supposer que l'éther des corps pondérables n'est pas *homogène,* mais reste *isotrope.*

On verra d'ailleurs, dans la suite de ce travail, qu'il suffit d'avoir égard à la *périodicité* des coefficients dont dépendent les équations de ses mouvements vibratoires, pour expliquer, dans cette hypothèse, non-seulement la double réfraction, mais encore la polarisation elliptique et circulaire qu'impriment à la lumière certains cristaux dissymétriques. Il n'est donc pas nécessaire de supposer, comme on l'a fait jusqu'à présent, que l'action de la matière pondérable modifie l'intervalle moyen des atomes de l'éther dans les diverses directions, autour d'un même point.

Analyse.

4. Supposons d'abord l'éther en équilibre. Soient :

μ et m les masses de deux atomes voisins;
x, y, z les coordonnées rectangulaires de μ;
$x+h$, $y+k$, $z+l$, celles de m;
r la distance des deux atomes;
$\mu m r f(r)$ leur action mutuelle.

Les composantes suivant les axes de la force accélératice exercée par m sur μ sont $mhf(r)$, $mkf(r)$, $mlf(r)$, et en désignant par X, Y, Z les composantes de la force accélératrice exercée par la matière sur ce même point, les équations de l'équilibre sont

$$(1)\qquad \begin{cases} X + \sum mhf(r) = 0, \\ Y + \sum mkf(r) = 0, \\ Z + \sum mlf(r) = 0, \end{cases}$$

le $\sum$ s'étendant à tous les atomes m compris dans la sphère d'action de μ.

5. Supposons maintenant que le milieu vibre. Soient u, v, w les déplacements de μ et $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$ ceux de m : la distance de ces points devient $r + \delta r$, et en négligeant les produits des δ, on a, pour les composantes de la force accélératrice exercée sur le point μ par l'éther environnant,

$$(2)\quad \begin{cases} \sum mh f(r) + \sum m\, f(r)\,\delta u + \sum mh f'(r)\,\delta r, \\ \sum mk f(r) + \sum m\, f(r)\,\delta v + \sum mk f'(r)\,\delta r, \\ \sum ml f(r) + \sum m f'(r)\,\delta w + \sum ml\, f'(r)\,\delta r. \end{cases}$$

Si on suppose enfin que les déplacements de l'éther sont très-petits par rapport aux dimensions d'un parallélipipède élémentaire de l'assemblage moléculaire, les variations correspondantes de X, Y, Z sont négligeables, et, en ayant égard aux équations (1), on obtient pour les équations du mouvement

$$(3)\quad \begin{cases} D_t^2 u = \sum m f(r)\,\delta u + \sum mh f'(r)\,\delta r, \\ D_t^2 v = \sum m f(r)\,\delta v + \sum mk f'(r)\,\delta r, \\ D_t^2 w = \sum m f(r)\,\delta w + \sum ml\, f'(r)\,\delta r. \end{cases}$$

La variation δr est donnée par la formule

$$(r + \delta r)^2 = (h + \delta u)^2 + (k + \delta v)^2 + (l + \delta w)^2,$$

qui se réduit à

$$r\delta r = h\delta u + k\delta v + l\delta w$$

dans l'approximation adoptée.

6. Pour transformer les équations (3) en équations aux dérivées partielles, il suffit de développer les δ par la série de Taylor, suivant

la formule symbolique

$$\delta = e^{h\mathrm{D}_x + k\mathrm{D}_y + l\mathrm{D}_z} - 1.$$

On obtient ainsi les équations des mouvements vibratoires sous la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_t^2 u = \mathrm{F}_1 u + \mathrm{F}_2 v + \mathrm{F}_3 w, \\ \mathrm{D}_t^2 v = \mathrm{G}_1 u + \mathrm{G}_2 v + \mathrm{G}_3 w, \\ \mathrm{D}_t^2 w = \mathrm{H}_1 u + \mathrm{H}_2 v + \mathrm{H}_3 w, \end{cases}$$

les F, G, H étant déterminés par les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}_1 = \sum m f(r)(e^\lambda - 1) + \sum m \dfrac{f'(r)}{r} h^2 (e^\lambda - 1), \\ \mathrm{G}_2 = \sum m f(r)(e^\lambda - 1) + \sum m \dfrac{f'(r)}{r} k^2 (e^\lambda - 1), \\ \mathrm{H}_3 = \sum m f(r)(e^\lambda - 1) + \sum m \dfrac{f'(r)}{r} l^2 (e^\lambda - 1), \\ \mathrm{F}_2 = \mathrm{G}_1 = \sum m \dfrac{f'(r)}{r} kl\ (e^\lambda - 1), \\ \mathrm{H}_1 = \mathrm{F}_3 = \sum m \dfrac{f'(r)}{r} lh\ (e^\lambda - 1), \\ \mathrm{G}_3 = \mathrm{H}_2 = \sum m \dfrac{f'(r)}{r} hk (e^\lambda = 1), \\ \lambda = h\mathrm{D}_x + k\mathrm{D}_y + l\mathrm{D}_z. \end{cases}$$

Cauchy a écrit les équations (4) sous une forme symbolique fort simple. Écrivant α, β, γ, σ au lieu de D_x, D_y, D_z, D_t, il pose

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \sum m f(r)(e^\lambda - 1), \\ \mathrm{B} = \sum m \dfrac{f'(r)}{r}\left(e^\lambda - 1 - \lambda - \dfrac{\lambda^2}{2}\right); \end{cases}$$

on a alors

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}_1 = \mathrm{A} + \mathrm{D}_\alpha^2 \mathrm{B}, \quad \mathrm{F}_2 = \mathrm{G}_1 = \mathrm{D}_\beta \mathrm{D}_\gamma \mathrm{B}, \\ \mathrm{G}_2 = \mathrm{A} + \mathrm{D}_\beta^2 \mathrm{B}, \quad \mathrm{H}_1 = \mathrm{F}_3 = \mathrm{D}_\gamma \mathrm{D}_\alpha \mathrm{B}, \\ \mathrm{H}_3 = \mathrm{A} + \mathrm{D}_\gamma^2 \mathrm{B}, \quad \mathrm{G}_3 = \mathrm{H}_2 = \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta \mathrm{B}; \end{cases}$$

et les équations (4) deviennent

$$(8)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = \mathrm{A}u + \mathrm{D}_\alpha(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{B}u + \mathrm{D}_\beta \mathrm{B}v + \mathrm{D}_\gamma \mathrm{B}w), \\ \sigma^2 v = \mathrm{A}v + \mathrm{D}_\beta(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{B}u + \mathrm{D}_\beta \mathrm{B}v + \mathrm{D}_\gamma \mathrm{B}w), \\ \sigma^2 w = \mathrm{A}w + \mathrm{D}_\gamma(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{B}u + \mathrm{D}_\beta \mathrm{B}v + \mathrm{D}_\gamma \mathrm{B}w), \end{cases}$$

les seconds membres représentant les fonctions symboliques F, G, H dont dépend la forme des équations auxiliaires. Le calcul de ces fonctions est ainsi ramené à celui des deux fonctions A et B dont la réduction peut d'ailleurs être effectuée comme si ses symboles α, β, γ étaient des quantités réelles.

7. Pour réduire A et B, il suffit d'employer la méthode indiquée par Cauchy dans son Mémoire sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans les systèmes isotropes de points (1).

Soit un point m compris dans la sphère d'action du point μ, désignons par r la distance μm et par φ et θ la colatitude et la longitude de cette distance, de sorte que les projections de r sur les trois axes sont

$$h = r\cos\varphi,\quad k = r\sin\varphi\cos\theta,\quad l = r\sin\varphi\sin\theta.$$

Imaginons un cône très-délié, ayant son sommet au point μ, renfermant le point m et découpant sur une sphère concentrique de rayon égal à 1 l'élément superficiel ω. Décrivons de plus, du point μ comme centre, deux sphères très-rapprochées avec les rayons r et $r+\Delta r$. Le volume très-petit compris entre ces trois surfaces est $r^2\omega\Delta r$; il renferme un grand nombre d'atomes dont la masse s'obtient en multipliant le volume par la densité de l'éther au point m, que nous supposons ne pas différer sensiblement de la densité ρ de l'éther au point μ.

On voit que l'on a, dans cette hypothèse,

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \rho\sum\sum r^2 f(r)(e^\lambda - 1)\,\omega\Delta r, \\ \mathrm{B} = \rho\sum\sum r f'(r)\left(e^\lambda - 1 - \lambda - \dfrac{\lambda^2}{2}\right)\omega\Delta r. \end{cases}$$

(1) *Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. Ier.

Le premier signe de sommation $\sum$ s'étend à tous les éléments ω d'une sphère de rayon égal à l'unité, et le second à toutes les valeurs de r croissant par degrés très-petits Δr d'une valeur très-petite à une limite égale au rayon de la sphère d'activité de l'éther.

Enfin, si l'on substitue, avec Poisson, à la première sommation une intégrale définie, il vient

$$(10)\qquad \begin{cases} A = \rho \sum r^2 f(r)\, \mathrm{I}\, \Delta r, \\ B = \rho \sum r f'(r)\, \mathrm{I}'\, \Delta r, \end{cases}$$

I et I' désignant les deux intégrales définies

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} (e^{\lambda} - 1) \sin\varphi\, d\varphi, \\ \mathrm{I}' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(e^{\lambda} - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) \sin\varphi\, d\varphi, \end{cases}$$

où l'on a

$$\lambda = r(\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi \cos\theta + \gamma \sin\varphi \cos\theta).$$

Ces intégrales sont réductibles à une intégrale simple. En effet, d'après une formule de Poisson, on a généralement

$$(12)\qquad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} f(u) \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{k} \int_{-k}^{k} f(x)\, dx,$$

en posant

$$u = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi \cos\theta + \gamma \sin\varphi \sin\theta,$$

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

En tenant compte de cette formule, on trouve

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{I} = 2\pi \left(\frac{e^{kr} - e^{-kr}}{kr} - 2\right) = 4\pi \left(\frac{k^2 r^2}{6} + \ldots\right), \\ \mathrm{I}' = 2\pi \left(\frac{e^{kr} - e^{-kr}}{kr} - 2 - \frac{k^2 r^2}{3}\right) = 4\pi \left(\frac{k^4 r^4}{120} + \ldots\right). \end{cases}$$

Substituant enfin ces valeurs de I, I′ dans les formules (10), il ne reste qu'à effectuer la sommation relative à r.

8. Cette sommation ne peut être qu'indiquée puisque la forme de la fonction $f(r)$ est inconnue. Mais, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer le calcul, on voit que A et B sont des fonctions de k^2. En désignant alors par B′ et B″ les dérivées première et seconde de B par rapport à k^2, et posant

$$(14)\qquad \begin{cases} A + 2B' = E(k^2), \quad 4B'' = F(k^2), \\ \theta = \alpha u + \beta v + \gamma w, \end{cases}$$

on réduit les équations (8) aux suivantes

$$(15)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = E(k^2)\, u + F(k^2)\, \alpha\theta, \\ \sigma^2 v = E(k^2)\, v + F(k^2)\, \beta\theta, \\ \sigma^2 w = E(k^2)\, w + F(k^2)\, \gamma\theta. \end{cases}$$

Telles sont les équations des vibrations de l'éther, *dans le vide comme dans les milieux matériels*. Dans le vide, les coefficients sont des constantes. Dans les milieux matériels, ils sont des fonctions de x, y, z.

9. En supposant constants les coefficients des équations (15), on en déduit aisément, comme Cauchy l'a fait le premier, les propriétés des ondes planes propagées par l'éther du vide.

Pour qu'un mouvement simple représenté par les intégrales

$$\frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

soit compatible avec la constitution du système, il faut que ses paramètres satisfassent aux trois équations obtenues en écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans le système (15), et en y considérant σ, α, β, γ, non plus comme des caractéristiques de dérivation, mais comme des constantes.

Éliminant P, Q, R, on a l'équation caractéristique qui se dédouble

comme il suit :

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(k^2), \tag{16}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(k^2) + \mathrm{F}(k^2)k^2. \tag{17}$$

Dans le premier cas, on trouve

$$\theta = \alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q} + \gamma\mathrm{R} = 0, \tag{18}$$

et dans le second

$$\frac{\mathrm{P}}{\alpha} = \frac{\mathrm{Q}}{\beta} = \frac{\mathrm{R}}{\gamma}, \tag{19}$$

relations d'où il résulte que les mouvements simples et non évanescents que peut propager l'éther du vide sont nécessairement de deux sortes : les uns dans lesquels les vibrations sont parallèles au plan des autres, sans polarisation déterminée; les autres, dans lesquels les vibrations sont perpendiculaires à ce plan. Ces deux genres de vibrations constituent les ondes *transversales* et *longitudinales*.

10. Ces propriétés cessent de subsister, en général, pour les vibrations propagées dans un milieu cristallisé. Les coefficients des équations (15) deviennent des fonctions périodiques des coordonnées, et il faut appliquer la méthode d'intégration développée dans le premier Mémoire. Les équations auxiliaires se déduisent alors, d'après la règle générale énoncée dans ce Mémoire, des trois fonctions symboliques F, G, H, qui se réduisent actuellement aux seconds membres des équations (15). D'ailleurs, la forme de ces trois fonctions se simplifie encore en ayant égard aux remarques suivantes.

11. L'observation indique que dans le vide :

1° Les vibrations lumineuses sont transversales;

2° Les rayons de différentes couleurs se propagent avec la même vitesse.

Il résulte de ces deux propriétés que la valeur de $\frac{\sigma}{k}$ déduite de l'équation (10) est indépendante de σ, et que, par suite, la fonction $\mathrm{E}(k^2)$ se réduit sensiblement à son premier terme.

Il suffit, pour que cette condition soit réalisée, que les deux séries (13) très-convergentes à cause de la petitesse de r, se réduisent sensiblement à leurs premiers termes. Comme il n'existe d'ailleurs aucune raison de supposer que les termes négligeables dans le vide aient une valeur sensible dans l'intérieur des corps pondérables, on voit que les équations générales des vibrations se réduisent aux suivantes :

$$(20)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = ek^2 u + f\alpha\theta, \\ \sigma^2 v = ek^2 v + f\beta\gamma, \\ \sigma^2 w = ek^2 w + f\gamma\theta, \end{cases}$$

dans lesquelles e et f désignent des constantes ou des fonctions périodiques, suivant que l'on considère l'éther libre ou l'éther renfermé dans un cristal.

Les coefficients e et f ont les valeurs suivantes, d'après les formules (14), (10) et (13) :

$$(21)\quad \begin{cases} e = \dfrac{4\pi\rho}{6}\sum\left[r^4 f(r) + \dfrac{1}{5} r^5 f'(r)\right]\Delta r, \\ f = \dfrac{4\pi\rho}{6}\sum \dfrac{2}{5} r^5 f'(r)\,\Delta r. \end{cases}$$

12. Appliquant actuellement aux équations (20) la règle générale qui sert à former les équations auxiliaires qui régissent les vibrations moyennes [*], on trouve que ces équations sont de la forme suivante :

$$(22)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = k^2(\mathrm{F}_1 u + \mathrm{F}_2 v + \mathrm{F}_3 w) + (f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma)\theta, \\ \sigma^2 v = k^2(\mathrm{G}_1 u + \mathrm{G}_2 v + \mathrm{G}_3 w) + (g_1\alpha + g_2\beta + g_3\gamma)\theta, \\ \sigma^2 w = k^2(\mathrm{H}_1 u + \mathrm{H}_2 v + \mathrm{H}_3 w) + (h_1\alpha + h_2\beta + h_3\gamma)\theta, \end{cases}$$

les f, g, h, F, G, H désignant des fonctions symboliques entières et à coefficients constants de α, β, γ.

Nous rappelons que σ, α, β, γ représentent les caractéristiques de dérivation D_t, D_x, D_y, D_z, et que l'on a, dans les équations (22),

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \theta = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 1867, p. 17.

13. En se reportant d'ailleurs à l'analyse du Mémoire précité, on voit que les fonctions indéterminées dont dépendent les équations (22) doivent être considérées comme des séries ordonnées suivant les puissances de α, β, γ, très-rapidement convergentes en général. On pourra donc, dans une première approximation, les réduire à des constantes. Dans ce cas, les équations (22) renferment 18 termes du second ordre au lieu de 54 que laissait subsister l'analyse du premier Mémoire.

On obtient de nouvelles approximations en conservant successivement dans ces fonctions les termes du premier, du deuxième, etc., ordre par rapport à α, β, γ. Les termes dont il s'agit fournissent l'explication de la dispersion, de la polarisation elliptique et de l'extinction que présentent certains cristaux.

14. Les équations (22) constituent le résultat définitif que nous nous proposions d'obtenir dans ce Chapitre. Le système (20) dont elles dérivent, quand on y considère les coefficients comme constants, ne sont pas altérées par une substitution linéaire orthogonale appliquée aux variables x, y, z, ou, ce qui revient au même, restent les mêmes quand on déplace d'une manière quelconque autour de l'origine le système des axes coordonnés.

Les hypothèses d'où se déduisent les équations (20) reviennent par conséquent à considérer l'éther comme présentant, en chacun de ses points, la même constitution dans toutes les directions.

Cette constitution varie d'ailleurs d'un point à un autre de l'éther compris dans l'intérieur d'un corps; mais, en un point déterminé, elle est la même dans tous les sens. Ainsi se trouve justifiée la dénomination de *périodiquement isotrope* que nous avons employée au commencement de ce Chapitre pour caractériser la constitution que présente probablement l'éther dans l'intérieur des corps cristallisés.

15. Les équations (22) reçoivent d'importantes réductions par suite de la symétrie propre aux divers systèmes cristallins. On obtient ces réductions par la méthode générale qui est développée dans notre premier Mémoire.

D'après cette méthode [*], on détermine l'influence des divers élé-

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 1867, p. 25.

ments de symétrie communs au polyèdre moléculaire et à l'assemblage cristallin, en exprimant que les équations auxiliaires, mises sous la forme générale

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= F_1 u + F_2 v + F_3 w,\\ \sigma^2 v &= G_1 u + G_2 v + G_3 w,\\ \sigma^2 w &= H_1 u + H_2 v + H_3 w,\end{aligned}\right.$$

ne sont pas altérées par certaines substitutions linéaires appliquées simultanément à u, v, w et à α, β, γ. Les seconds membres des équations (21) sont linéaires et homogènes par rapport à u, v, w, et de cette condition résulte essentiellement la forme que présentent, suivant les cas, les F, G, H fonctions de α, β, γ.

Cela posé, si on revient aux équations (22), et si on observe :

1° Que k^2 et θ se reproduisent identiquement quand on applique une substitution linéaire quelconque aux variables u, v, w et α, β, γ;

2° Que les termes proportionnels à k^2 et à θ sont fonctions linéaires et homogènes, les premiers de u, v, w, les seconds de α, β, γ.

Il sera aisé de conclure que, dans chaque symétrie particulière, les fonctions F_1 et f_1 des équations (22) seront composées en α, β, γ comme la fonction F_1 des équations (23); les fonctions F_2 et f_2 du système (22) comme la fonction F_2 du système (23), et ainsi de suite.

On pourra donc écrire sans difficulté, en se reportant aux divers systèmes précédemment obtenus [*], les diverses classes d'équations auxiliaires qui se déduisent des équations (22), quand on tient compte, non-seulement du système cristallin, mais encore des divers cas de mériédrie (hémiédrie ou tétartoédrie) que présente chaque système.

16. Parmi les divers systèmes d'équations que l'on obtient ainsi, il faut remarquer celui qui est relatif à l'*holoaxie centrée de la symétrie terbinaire* (système du prisme droit à base rectangle), lorsque dans une première approximation on réduit les équations auxiliaires à l'homogénéité.

Ce système doit fournir, en effet, l'explication complète des phénomènes optiques que présentent (quand on néglige la dispersion) les

---

[*] *Loc. cit.*, p. 34 et suivantes.

cristaux holoédriques connus sous le nom de *cristaux à deux axes optiques*, c'est-à-dire des phénomènes qui, sous le nom de *double réfraction* et *polarisation*, ont si vivement attiré, depuis Fresnel, l'attention des physiciens et des géomètres.

Or, en ayant égard aux remarques du numéro précédent, on obtient immédiatement les équations dont il s'agit :

$$(24)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = fk^2 u + f_1\,\alpha\theta, \\ \sigma^2 v = gk^2 v + g_1\,\beta\theta, \\ \sigma^2 w = hk^2 w + h_1\,\gamma\theta, \end{cases}$$

les f, g, h de ces formules représentant des paramètres constants.

Rétablissant enfin les caractéristiques de dérivation, on obtient le système suivant :

$$(25)\quad \begin{cases} D_t^2 u = f(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\,u + f_1\,D_x(D_x u + D_y v + D_z w), \\ D_t^2 v = g(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\,v + g_1\,D_y(D_x u + D_y v + D_z w), \\ D_t^2 w = h(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\,w + h_1\,D_z(D_x u + D_y v + D_z w). \end{cases}$$

Ces équations conduisent à de nouvelles et importantes propriétés des ondes lumineuses, dont l'étude fait l'objet d'un des Chapitres suivants.

Nous nous bornerons à remarquer ici que ces équations renferment *six paramètres distincts*. L'étude approfondie des phénomènes lumineux semble indiquer que *trois* seulement de ces paramètres, correspondant aux trois *indices principaux de réfraction*, sont réellement indépendants.

On verra, en effet, que l'on reproduit exactement les faits d'observation en supposant les trois relations

$$f + f_1 = g + g_1 = h + h_1 = 0.$$

Il paraît assez difficile de déterminer avec précision la cause physique de ces dernières relations, qui introduisent une extrême simplicité dans les équations des phénomènes et dans l'énoncé des lois qui en résultent. Nous essayerons cependant de montrer, dans le Chapitre

suivant, comment on peut en retrouver l'origine dans une hypothèse de Fresnel sur la constitution de l'éther. La discussion qui fait l'objet de ce Chapitre signalera plus d'un rapprochement entre les principes de la théorie que nous exposons et les hypothèses admises par l'illustre physicien sur la nature intime de l'agent qui propage les phénomènes lumineux.

CHAPITRE III.

REMARQUES SUR DEUX POINTS FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE PHYSIQUE DE LA LUMIÈRE.

REMARQUE I. — *L'hypothèse de Fresnel sur la variation de densité que la matière pondérable imprime à l'éther peut servir de base à une théorie de la double réfraction.*

1. On sait qu'une des hypothèses admises par Fresnel dans son *Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée* consiste à supposer que l'indice de réfraction d'une substance est proportionnel à la racine carrée de la densité de l'éther, contrairement aux idées admises depuis par Mac-Cullagh et M. Newmann, qui supposent que la densité de l'éther est la même dans tous les corps, et que son élasticité est seule altérée différemment par les divers milieux pondérables.

Or cette hypothèse de l'illustre physicien ne paraît guère conciliable avec les idées qu'il avait précédemment adoptées dans son célèbre *Mémoire sur la double réfraction*, où, négligeant toute variation de densité de l'éther dans les cristaux, il attribue la production des phénomènes à une variation de l'élasticité dans les diverses directions autour d'un point.

De là une sorte de contradiction que les considérations développées dans le Chapitre précédent font complétement disparaître, en établissant que la théorie de la double réfraction peut être exclusivement basée, comme celle de la réflexion, sur la variation périodique qu'éprouve la *densité* de l'éther dans l'intérieur des corps cristallisés.

2. En effet, les équations (25) du Chapitre précédent renferment évidemment une théorie complète de la double réfraction et de la po-

larisation, qui, si l'on fait provisoirement abstraction des relations naturelles qui peuvent exister entre les paramètres, ne doit différer de celle de Fresnel que par certaines particularités relatives à la direction des vibrations et à la forme de la surface des ondes. Ces équations ont été d'ailleurs déduites du système (20), en supposant seulement que les coefficients e et f sont des fonctions périodiques des coordonnées.

3. Cela posé, il est aisé de voir que la périodicité de ces deux coefficients dépend de celle d'un seul élément, qui est la *densité de l'éther*. En se reportant, en effet, aux valeurs (12) de e, f, on voit qu'elles s'obtiennent en multipliant la densité ρ par certaines sommes dont le calcul ne pourrait être achevé que si l'on connaissait la loi qui régit les actions intérieures de l'éther.

En considérant l'éther comme continu, les sommes pourraient être réduites à des intégrales définies prises entre deux limites égales à zéro et au rayon de la sphère d'activité de l'éther. Elles auraient donc des valeurs égales pour l'éther libre ou pour l'éther renfermé dans un corps quelconque, de sorte que e et f seraient proportionnels à la densité.

Mais, suivant une remarque de Poisson, ces intégrations autour d'un point ne sont pas admissibles en général, et il est nécessaire de considérer les $\sum$ comme des sommes aux différences finies.

4. Dans ce cas, on pourra effectuer ces sommations sur des termes tous proportionnels à l'*intervalle moyen* δ qui sépare deux points voisins de l'éther. Cet intervalle peut être considéré comme constant dans toute l'étendue de la sphère d'activité, puisqu'il est lié à la densité, supposée constante dans la même étendue, par une relation de la forme $\rho = \frac{k}{\delta^3}$, k désignant un nombre constant.

En conséquence, le résultat final des sommations ne pourra contenir que des nombres, des constantes dépendant de la fonction des forces intérieures, et enfin l'intervalle δ. Les sommes $\sum$ sont des fonctions de δ, qui, puisque δ est inversement proportionnel à $\rho^{\frac{1}{3}}$, se transforment

en fonctions de ρ. On peut donc poser

$$e = \varphi(\rho), \quad f = \psi(\rho),$$

et l'on voit clairement ainsi qu'il suffit d'admettre une variation périodique de la densité pour déduire des équations (20), par la méthode générale d'intégration, le système auxiliaire (25), d'où on déduit enfin les lois qui régissent la double réfraction et la polarisation des vibrations moyennes.

REMARQUE II. — *Les relations qui existent entre les paramètres des équations auxiliaires peuvent être rattachées à la cause physique qui, suivant une hypothèse de Fresnel, produit l'absence de toute vibration longitudinale dans l'éther.*

5. Nous avons remarqué, à la fin du Chapitre précédent, que l'on était conduit à des résultats conformes aux faits observés, en supposant entre les paramètres des équations (25) les relations

$$f + f_1 = g + g_1 = h + h_1 = 0.$$

Pour admettre ces relations, il suffit d'admettre que les deux fonctions φ et ψ sont égales et de signes contraires, de sorte que l'on a

$$(1) \qquad \varphi(\rho) + \psi(\rho) = 0.$$

Or il est remarquable que dans cette hypothèse la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre, déduite de l'équation $\sigma^2 = (e + f)k^2$, se réduit à zéro.

On voit donc que la relation hypothétique (1) revient à attribuer à l'éther cette inaptitude à propager les vibrations longitudinales que Fresnel considérait comme la propriété caractéristique de ce milieu élastique.

6. Sans rechercher ici quelle peut être l'origine de cette propriété, nous l'admettrons avec la relation fondamentale (1), qui en est la formule équivalente, comme un postulatum dont l'exactitude est démontrée par la confirmation expérimentale des conséquences qui en résultent.

Nous supposerons donc désormais que les vibrations de l'éther, dans un milieu quelconque, sont régies par les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = e(k^2 u - \alpha\vartheta), \\ \sigma^2 v = e(k^2 v - \beta\vartheta), \\ \sigma^2 w = e(k^2 w - \gamma\vartheta), \end{cases}$$

dans lesquelles e désigne une fonction de la densité, et, par suite, une fonction périodique des coordonnées.

En posant, pour abréger,

$$(3)\qquad \mathrm{U} = k^2 u - \alpha\vartheta, \quad \mathrm{V} = k^2 v - \beta\vartheta, \quad \mathrm{W} = k^2 w - \gamma\vartheta,$$

on trouve que le système des équations auxiliaires est réductible à la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = \mathrm{F}_1 \mathrm{U} + \mathrm{F}_2 \mathrm{V} + \mathrm{F}_3 \mathrm{W}, \\ \sigma^2 v = \mathrm{G}_1 \mathrm{U} + \mathrm{G}_2 \mathrm{V} + \mathrm{G}_3 \mathrm{W}, \\ \sigma^2 w = \mathrm{H}_1 \mathrm{U} + \mathrm{H}_2 \mathrm{V} + \mathrm{H}_3 \mathrm{W}, \end{cases}$$

et que les F, H, G, fonctions de α, β, γ, éprouvent, par suite de la symétrie cristalline, les mêmes réductions que les fonctions désignées par les mêmes lettres dans le système général des équations auxiliaires considérées au second Chapitre de notre premier Mémoire. Par suite, on obtiendra les équations (4) relatives aux divers systèmes et cas particuliers de mériédrie, en écrivant U, V, W au lieu de u, v, w dans les seconds membres des équations obtenues dans le Mémoire précité.

7. Pour donner une idée des résultats définitifs que fournit la théorie précédente, nous avons réuni dans un tableau, à la fin de ce Chapitre, les équations aux dérivées partielles qui, *en conservant les termes du second et du troisième ordre,* régissent les vibrations lumineuses dans les principaux systèmes.

Nous laissons de côté les systèmes *asymétrique* et *binaire,* qui donnent lieu a des équations assez complexes, et exigent, suivant toute probabilité, l'emploi spécial de certaines coordonnées obliques.

Nous renvoyons enfin aux deux Chapitres suivants l'étude des propriétés principales des ondes planes.

8. Il importe d'observer que les principes d'où résultent ces équations font de notre théorie une sorte de commentaire à celle qu'a adoptée Fresnel dans son *Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée* [*]. Ce Mémoire peut être considéré comme l'expression des idées définitives de son auteur sur le mécanisme des phénomènes optiques. Il est, en effet, postérieur au *Mémoire sur la double réfraction* [**] et à un premier *Mémoire sur la réflexion* [***], où Fresnel a cherché à expliquer les lois de ce phénomène à l'aide d'hypothèses autres que celles d'une densité variable de l'éther.

Les physiciens ne verront donc peut-être pas sans intérêt que les notions fondamentales qui ont paru les plus plausibles à l'illustre physicien suffisent à une théorie complète de la double réfraction et de la polarisation rectiligne, et permettent même d'obtenir analytiquement les lois de la polarisation elliptique et circulaire constatées expérimentalement sur la lumière propagée par certains cristaux hémiédriques.

TABLEAU DES ÉQUATIONS QUI RÉGISSENT LES PHÉNOMÈNES OPTIQUES DANS LES CRISTAUX CLASSÉS D'APRÈS LA NATURE ET LE NOMBRE DE LEURS ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE.

Observation générale. — On a simplifié les équations ci-après en observant que la dilatation cubique θ des vibrations lumineuses, rigoureusement nulle dans les milieux isotropes, est généralement *très-petite* dans les cristaux. On peut, par suite, réduire approximativement, dans les termes du troisième ordre, U, V, W aux valeurs simples

$$U = k^3 u, \quad V = k^2 v, \quad W = k^2 w.$$

[*] Janvier 1823.

[**] Novembre 1821.

[***] Novembre 1819.

I. — *Symétrie terbinaire.*

1° *Holoaxie centrée ou homoédrie* [Λ^2, $2L^2$, C, Π, 2P] :

$$(5)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* [Λ^2, $2L^2$, oC, oP] :

$$(6)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(\varphi_1 \gamma u + \varphi_2 \beta w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(\chi_1 \alpha w + \chi_2 \gamma u), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(\psi_1 \beta u + \psi_2 \alpha v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^2, oL^2, oC, 2P] :

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(\varphi_1 \alpha u + \varphi_2 \beta v + \varphi_3 \gamma w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(\chi_1 \beta u + \chi_2 \alpha v), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(\psi_1 \gamma u + \psi_2 \alpha w). \end{cases}$$

II. — *Symétrie ternaire.*

1° *Holoaxie centrée ou homoédrie* [Λ^3, $3L^2$, C, Π, $3P^2$] :

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* [Λ^3, $3L^2$, oC, oP] :

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta w - \gamma v), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) - k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w) + h_1 k^2(\beta v - \gamma w), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v) - h_1 k^2(\beta w + \gamma v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^3, oL^2, oC, 3P] :

$$(10)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta v + \gamma w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v) + h_1 k^2(\beta v - \gamma w), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w) - h_1 k^2(\beta w + \gamma v). \end{cases}$$

III. — *Symétries quaternaire et sénaire.*

1° *Holoaxie centrée* ou *homoédrie* [Λ^4, 4L^2, C, Π, 4P^2], [Λ^6, 6L^2, C, Π, 6P^2] :

$$(11)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* [Λ^2, 4L^2, oC, oP], [Λ^6, 6L^2, oC, oP] :

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta w - \gamma v), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) - k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^4, oL^2, oC, 4P], [Λ^6, oL^2, oC, 6P] :

$$(13)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta v + \gamma w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w). \end{cases}$$

IV. — *Symétrie terquaternaire.*

1° *Holoaxie centrée* ou *homoédrie* [3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2] :

$$(14)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* $[3L^4, 4L^3, 6L^2, oC, oP]$:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\gamma v - \beta w),\\ \sigma^2 v &= f(k^2 v - \beta\theta) + f_1 k^2(\alpha w - \gamma u),\\ \sigma^2 w &= f(k^2 w - \gamma\theta) + f_1 k^2(\beta u - \alpha v).\end{aligned}\right.$$

3° *Hémiaxie hémisymétrique* $[3L^2, 4L^3, oC, oP]$:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(f_1\gamma v + f_2\beta w),\\ \sigma^2 v &= f(k^2 v - \beta\theta) + k^2(f_1\gamma w + f_2\gamma u),\\ \sigma^2 w &= f(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(f_1\beta u + f_2\alpha v).\end{aligned}\right.$$

4° *Hémiaxie dichosymétrique* $[3L^2, 4L^3, oC, 6P]$:

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\gamma v + \beta w),\\ \sigma^2 v &= f(k^2 v - \beta\theta) + f_1 k^2(\alpha w + \gamma u),\\ \sigma^2 w &= f(k^2 w - \gamma\theta) + f_1 k^2(\beta u + \alpha v).\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE IV.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES DE L'ÉTHER RENFERMÉ DANS UN MILIEU HOMOÉDRIQUE.

1. Ce Chapitre est consacré à l'étude des ondes planes déduite des formules (5), (8) et (14) du tableau précédent.

Voici le résumé des principaux résultats obtenus :

Dans les cristaux à deux axes optiques, l'équation aux vitesses des ondes planes coïncide *rigoureusement* avec celle de Fresnel.

Quant à la polarisation, elle est déterminée par le théorème suivant : *La vibration d'une onde plane est dirigée dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux correspondant;* elle est de plus *perpendiculaire au rayon.* La vibration n'est donc pas comprise dans le plan de l'onde, comme le supposait Fresnel; sa direction fait avec ce plan un angle qui pour certains corps très-biréfringents, l'azotate de soude par exemple, peut dépasser 9 degrés.

2. Ce résultat conduit à des conséquences importantes pour la théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface des cristaux.

Bien que ces conséquences ne soient pas développées dans ce Mémoire, nous croyons devoir les indiquer brièvement, afin de préciser les circonstances qui servent de contrôle à la théorie et aux hypothèses sur lesquelles elle est basée.

3. La théorie de la réflexion et de la réfraction cristallines comprend deux problèmes distincts :

Le premier a pour objet la recherche des équations de condition auxquelles satisfont les déplacements atomiques sur la surface de séparation des deux milieux;

Le second comprend l'étude des mouvements simples ou par ondes planes que peuvent propager ces milieux.

4. *Principales solutions du premier problème.* — Dans ces recherches sur la réflexion, Fresnel a admis : 1° que le déplacement d'un atome de la surface réfringente, *estimé parallèlement à cette surface,* dans l'onde réfractée, se confond avec la résultante de ses déplacements estimés de la même manière dans l'onde incidente et dans l'onde réfléchie; 2° que la force vive des ondes réfléchie et réfractée est égale à celle de l'onde incidente.

Ces principes donnent trois équations à la surface. Il en faut quatre dans le cas des cristaux. Mac-Cullagh et M. Newmann ont complété la solution en étendant le *principe de continuité* de Fresnel aux déplacements *estimés suivant la normale* à la surface réfringente.

De son côté, Cauchy a obtenu, par diverses méthodes dont la rigueur serait difficilement contestée, quatre équations de condition qui reproduisent celles de Fresnel par la suppression de certains termes très-petits, mais sont incompatibles avec la quatrième condition introduite par Mac-Cullagh et M. Newmann.

5. *Principales solutions du second problème.* — Le second problème a été l'objet de nombreuses recherches des physiciens et des géomètres.

Suivant Fresnel, la vibration est dans le plan de l'onde et est dirigée dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux.

D'après Mac-Cullagh et M. Newmann, elle est située dans le plan de l'onde et est perpendiculaire au rayon. M. Lamé trouve le même résultat dans ses *Leçons sur l'Élasticité.*

D'après notre théorie, la vibration est dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon, comme le supposait Fresnel, et elle est perpendiculaire au rayon.

6. Cela posé, lorsque l'on introduit la polarisation de Fresnel dans les équations à la surface de Cauchy, on obtient des formules qui représentent la marche générale des phénomènes, mais attribuent à certains éléments directement mesurables, tels que les angles de polarisation totale, des valeurs numériques notablement différentes des valeurs observées.

Au contraire, en combinant la polarisation de Mac-Cullagh et de M. Newmann avec les équations à la surface admises par ces physiciens, on obtient des formules parfaitement concordantes avec les faits.

Enfin, en combinant les équations à la surface de Cauchy avec la polarisation que nous avons trouvée, on reproduit les formules exactes de Mac-Cullagh et de M. Newmann.

7. Dans son *Traité d'Optique physique,* M. Billet avait déjà remarqué qu'il n'est pas nécessaire d'apporter à la théorie de Fresnel les modifications profondes introduites par Mac-Cullagh et M. Newmann, pour ramener entre les limites des erreurs expérimentales les différences entre les résultats du calcul et ceux de l'observation. La modification qui place la vibration perpendiculaire au rayon lui paraît seule importante.

C'est cette modification qu'introduisent les hypothèses fondamentales de ce Mémoire.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer qu'elles laissent, conformément à la théorie de Fresnel, la vibration perpendiculaire au plan de polarisation dans les milieux isotropes. La théorie de Mac-Cullagh et de M. Newmann la place au contraire dans ce plan.

8. En résumé, si on accepte comme rigoureuses les considérations sur lesquelles reposent les équations de condition données par Cauchy,

on est conduit à admettre que la théorie opposée à celle de Fresnel a abordé le problème à l'aide de deux hypothèses physiquement fausses, qui, par suite d'une compensation, ont fourni un résultat définitif conforme à la réalité.

Bien que donnant des formules moins exactes, les principes fondamentaux de Fresnel paraissent plus voisins de la vérité; et c'est parce que la théorie que nous exposons ici apporte à ces principes la modification nécessaire pour supprimer toute discordance avec les faits que nous croyons à la réalité physique du principe introduit.

9. Terminons par une dernière observation. Les équations auxquelles nous sommes parvenus pour représenter les propriétés optiques des cristaux à deux axes, lorsque l'on néglige la dispersion, sont essentiellement distinctes de celles auxquelles satisfont les vibrations d'un système *homogène* d'atomes ou de molécules. Bien qu'elles ne renferment que trois paramètres, il est impossible de les faires rentrer dans les équations des vibrations des systèmes de points matériels données par Cauchy, ou même dans les équations à 36 indéterminées de M. Lamé.

Leur forme dérive essentiellement de la *constitution périodique* du milieu vibrant, c'est-à-dire d'un état statique qu'on ne peut expliquer simplement qu'en admettant qu'il est dû aux actions perturbatrices d'un second milieu différent. Ce résultat est important parce qu'il implique la nécessité de faire intervenir dans la production des phénomènes lumineux deux systèmes distincts qui ne peuvent être que la matière pondérable, et cet agent mystérieux et insaisissable, l'éther, que toutes les théories physiques s'accordent aujourd'hui à révéler à notre esprit comme l'élément le plus actif, le plus puissant de la force universelle.

Analyse.

10. Les généralités du Chapitre Ier permettront d'établir rapidement les propriétés des ondes planes.

Conformement aux notations de ce Chapitre, ces propriétés seront déduites des intégrales simples correspondantes prises sous la forme

$$\frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

et les relations entre les constantes s'obtiendront, dans chaque cas, en écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans chacun des groupes du tableau général, et en y considérant α, β, γ, σ comme des quantités, et non comme des symboles.

Suivant une remarque faite précédemment (Chap. I[er], n° **10**), nous supposerons constamment que le plan d'une onde évanescente est parallèle au plan à partir duquel elle s'éteint. En désignant alors par l, m, n les cosinus des angles que la normale à l'onde fait avec les axes, on aura

$$\alpha = kl, \quad \beta = km, \quad \gamma = kn;$$

et le rapport $\omega = \frac{\sigma}{k}$ sera réel ou imaginaire, suivant que l'onde ne sera pas ou sera évanescente. Dans le premier cas, il se réduira à la vitesse de propagation de l'onde.

Cela posé, nous passons à l'étude des cas particuliers.

Symétrie terbinaire.

11. Les équations relatives à ce cas sont les équations (5) du tableau. En y écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w, il vient

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma^2 \mathrm{P} = f(k^2 \mathrm{P} - \alpha\vartheta), \\ \sigma^2 \mathrm{Q} = g(k^2 \mathrm{Q} - \beta\vartheta), \\ \sigma^2 \mathrm{R} = h(k^2 \mathrm{R} - \gamma\vartheta), \end{cases}$$

où on suppose toujours $k^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\vartheta = \alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q} + \gamma\mathrm{R}$.

Éliminant P, Q, R, on obtient l'équation caractéristique

$$(2) \qquad \frac{f\alpha^2}{\sigma^2 - fk^2} + \frac{g\beta^2}{\sigma^2 - gk^2} + \frac{h\gamma^2}{\sigma^2 - hk^2} + 1 = 0.$$

De plus, des équations (1), on déduit les rapports

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{P}}{\left(\frac{f\alpha}{\sigma^2 - fk^2}\right)} = \frac{\mathrm{Q}}{\left(\frac{g\beta}{\sigma^2 - gk^2}\right)} = \frac{\mathrm{R}}{\left(\frac{h\gamma}{\sigma^2 - hk^2}\right)} = -\vartheta.$$

12. Si l'on pose actuellement dans les équations (2) et (3)

$$\alpha = hl, \quad \beta = km, \quad \gamma = kn, \quad \omega = \frac{\sigma}{k},$$
$$\varphi = lP + mQ + nR,$$

elles se transforment comme il suit

$$(4) \qquad \frac{fl^2}{\omega^2 - f} + \frac{gm^2}{\omega^2 - g} + \frac{hn^2}{\omega^2 - h} + 1 = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{P}{\left(\frac{fl}{\omega^2 - f}\right)} = \frac{Q}{\left(\frac{gm}{\omega^3 - g}\right)} = \frac{R}{\left(\frac{hn}{\omega^2 - h}\right)} = -\varphi.$$

Telles sont les équations d'où résultent les lois de la propagation et de la polarisation du mouvement.

L'équation (4) résolue par rapport à ω^2 admet évidemment deux racines positives et une racine nulle. Aux deux premières correspondent deux ondes se propageant sans s'affaiblir dans la même direction, avec des vitesses différentes.

Pour la racine $\omega^2 = 0$ les équations se réduisent aux suivantes

$$(6) \qquad \frac{P}{l} = \frac{Q}{m} = \frac{R}{n} = \varphi.$$

Ces équations correspondent à un mouvement simple *longitudinal;* mais la condition $\omega^2 = 0$ montre que ce mouvement ne peut se propager.

Les deux autres racines ω^2 sont fournies par l'équation

$$(7) \qquad \frac{l^2}{\omega^2 - f} + \frac{m^2}{\omega^2 - g} + \frac{n^2}{\omega^2 - h} = 0,$$

qui coïncide rigoureusement avec l'équation aux vitesses des ondes planes trouvée par Fresnel. Mais le mode de polarisation qui résulte alors des formules (5) diffère notablement de celui qui se déduit de la théorie de l'illustre physicien.

13. On voit d'abord que les quantités P, Q, R étant proportionnelles à des quantités réelles (Chap. I, n° **7**), la trajectoire ato-

mique se réduit à une ligne droite. La polarisation est donc *rectiligne*.

Pour la définir avec précision, il est utile de rappeler brièvement le calcul de la *surface des ondes*.

On sait que son équation s'obtient en cherchant l'enveloppe du plan

$$lx + my + nz = \omega, \tag{8}$$

les paramètres l, m, n, ω étant liés par l'équation (7) et la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{9}$$

D'après la théorie des enveloppes, on doit différentier successivement les équations (7), (8) et (9) par rapport aux deux paramètres laissés indépendants, on obtient ainsi les équations ci-dessous, où l'on a représenté, pour abréger, par 2F le premier membre de l'équation (7) :

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} & x + z\frac{dn}{dl} - \frac{d\omega}{dl} = 0, \\ & l + n\frac{dn}{dl} = 0, \\ & \frac{dF}{dl} + \frac{dF}{dn}\frac{dn}{dl} + \frac{dF}{d\omega}\frac{d\omega}{dl} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{11} \left\{ \begin{aligned} & y + z\frac{dn}{dm} - \frac{d\omega}{dm} = 0, \\ & m + n\frac{dn}{dm} = 0, \\ & \frac{dF}{dm} + \frac{dF}{dn}\frac{dn}{dm} + \frac{dF}{d\omega}\frac{d\omega}{dm} = 0, \end{aligned} \right.$$

et l'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant les paramètres l, m, n, ω et les dérivées partielles de n et ω entre les équations (7), (8), (9), (10) et (11). On simplifie l'élimination, en substituant aux équations (10) et (11) les suivantes

$$\tag{12} \left\{ \begin{aligned} & x + \lambda l + \mu\frac{dF}{dl} = 0, \\ & y + \lambda m + \mu\frac{dF}{dm} = 0, \\ & z + \lambda n + \mu\frac{dF}{dn} = 0, \\ & \quad - 1 + \mu\frac{dF}{d\omega} = 0. \end{aligned} \right.$$

En effet, l'élimination de λ et μ entre les équations (12) conduit au même résultat que l'élimination des dérivées partielles de n et ω entre les équations (10) et (11).

Ajoutons que les équations (12) déterminent les coordonnées x, y, z du point de contact de l'enveloppe avec le plan tangent et, par suite, la direction du *rayon lumineux* correspondant à l'onde plane qui se propage dans la direction (l, m, n).

14. Ajoutant les trois premières équations (12) respectivement multipliées 1° par $\frac{dF}{dl}, \frac{dF}{dm}, \frac{dF}{dn}$; 2° par l, m, n; 3° par x, y, z, et observant que l'on a $l\frac{dF}{dl} + m\frac{dF}{dm} + n\frac{dF}{dn} = 2F = 0$, il vient

$$x\frac{dF}{dl} + y\frac{dF}{dm} + z\frac{dF}{dn} + \mu\left[\left(\frac{dF}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dn}\right)^2\right] = 0,$$

$$\omega + \lambda = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \mu\left(x\frac{dF}{dl} + y\frac{dF}{dm} + z\frac{dF}{dn}\right) = 0.$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que $\left(\frac{dF}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dn}\right)^2 = -\frac{1}{\omega}\frac{dF}{d\omega}$.

Observant de plus que $\mu\frac{dF}{d\omega} = 1$, et posant $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, les trois relations ci-dessus deviennent

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\frac{dF}{dl} + y\frac{dF}{dm} + z\frac{dF}{dn} = \frac{1}{\omega},\\ &\lambda = -\omega,\\ &\mu = -\omega(\rho^2 - \omega^2).\end{aligned}\right.$$

Portant les valeurs de λ et μ dans les équations (12) on a

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= l\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2)\frac{dF}{dl},\\ y &= m\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2)\frac{dF}{dm},\\ z &= n\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2)\frac{dF}{dn};\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$\frac{x}{\rho^2 - f} = \frac{l\omega}{\omega^2 - f}, \quad \frac{y}{\rho^2 - g} = \frac{m\omega}{\omega^2 - g}, \quad \frac{z}{\rho^2 - h} = \frac{n\omega}{\omega^2 - h}; \tag{15}$$

ajoutant enfin ces dernières équations, respectivement multipliées par x, y, z, et ayant égard à la première des équations (13), on obtient l'équation de la surface des ondes

$$\frac{x^2}{\rho^2 - f} + \frac{y^2}{\rho^2 - g} + \frac{z^2}{\rho^2 - h} = 1. \tag{16}$$

15. Revenant actuellement aux équations (5), on voit que les projections du déplacement atomique sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{fl}{\omega^2 - f}, \quad \frac{gm}{\omega^2 - g}, \quad \frac{hn}{\omega^2 - h},$$

que nous désignerons par X, Y, Z. On a d'ailleurs identiquement

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{\omega^2 l}{\omega^2 - f} - l = \omega^2 \frac{d\mathrm{F}}{dl} - l, \\ \mathrm{Y} &= \frac{\omega^2 m}{\omega^2 - g} - m = \omega^2 \frac{d\mathrm{F}}{dm} - m, \\ \mathrm{Z} &= \frac{\omega^2 n}{\omega^2 - h} - n = \omega^2 \frac{d\mathrm{F}}{dn} - n; \end{aligned}\right. \tag{17}$$

formules qui permettent, en ayant égard aux valeurs (13) de λ et μ, d'écrire les équations (14) comme il suit

$$\left\{\begin{aligned} x - \frac{\rho^2}{\omega} l + \frac{\mu}{\omega^2} \mathrm{X} &= 0, \\ y - \frac{\rho^2}{\omega} m + \frac{\mu}{\omega^2} \mathrm{Y} &= 0, \\ z - \frac{\rho^2}{\omega} n + \frac{\mu}{\omega^2} \mathrm{Z} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Éliminant $\frac{\rho^2}{\omega}$ et $\frac{\mu}{\omega^2}$, on a la relation

$$\mathrm{X}(yn - zm) + \mathrm{Y}(zl - xn) + \mathrm{Z}(xm - yl) = 0, \tag{19}$$

qui montre que *la vibration, la normale à l'onde et le rayon lumineux sont dans un même plan.*

Ajoutant enfin les équations (18) respectivement multipliées par x, y, z on a immédiatement

$$xX + yY + zZ = 0, \tag{20}$$

relation qui montre *que la vibration est perpendiculaire au rayon lumineux.*

Ces deux propriétés définissent d'une manière simple la polarisation d'une onde plane dans un milieu biréfringent, et constituent un théorème remarquable dont voici l'énoncé :

Toute onde plane propagée par un milieu biréfringent est polarisée rectilignement. La direction de la vibration est comprise dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux correspondant. Elle est de plus perpendiculaire au rayon.

Symétries ternaire, quaternaire et sénaire.

16. En supposant $h = g$, on obtient les équations relatives aux mouvements simples propagés par les milieux à un axe.

Dans ce cas, les deux racines de l'équation (4) sont les suivantes :

$$\omega^2 = g, \tag{21}$$

$$\omega^2 = gl^2 + f(m^2 + n^2). \tag{22}$$

Le premier correspond au rayon *ordinaire* des physiciens, la seconde au rayon *extraordinaire*. Le mode de polarisation se déduit sans difficulté des équations (5) qui donnent :

1° Pour l'onde ordinaire

$$P = 0, \quad mQ + nR = 0; \tag{23}$$

2° Pour l'onde extraordinaire

$$\frac{P}{f(m^2 + n^2)} = \frac{Q}{-glm} = \frac{R}{-gln}. \tag{24}$$

Ces formules montrent que la vibration *ordinaire* est comprise dans le plan de l'onde. Mais il n'en est pas de même pour l'onde extraordinaire.

On trouve sans difficulté que l'angle V compris entre la vibration extraordinaire et le plan de l'onde est déterminé par la formule

$$(25) \qquad \sin V = \frac{1}{2} \frac{(f-g)\sin 2\tau}{\sqrt{f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau}},$$

en appelant τ l'angle que la normale à l'onde fait avec l'axe principal de symétrie.

L'observation indique que g diffère généralement fort peu de f. L'angle V est donc très-petit, mais il n'est pas nul comme le supposait Fresnel.

Pour le spath, on trouve, en donnant aux coefficients f, g les valeurs que leur attribue l'expérience, que, pour $\tau = \frac{\pi}{4}$, l'inclinaison de la vibration extraordinaire sur l'onde est de $6° 12'$. Pour l'azotate de soude, qui est très-biréfringent, sa valeur s'élève à $9° 38'$.

17. Il ne reste plus qu'à mentionner les phénomènes optiques des cristaux du système cubique. En ne conservant dans les équations que les termes du second ordre, ces phénomènes sont identiques à ceux qui se produisent dans le vide et dans les corps isotropes. La double réfraction disparaît, et la vitesse de propagation est seule modifiée par l'action de la matière pondérable sur l'éther.

CHAPITRE V.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES DE L'ÉTHER RENFERMÉ DANS UN MILIEU HÉMIÉDRIQUE.

1. Parmi les phénomènes lumineux qui offrent le plus d'intérêt, on doit citer ceux que présentent le quartz, le sulfate de strychnine et quelques cristaux du système cubique.

Les cristaux de quartz et de sulfate de strychnine appartiennent, les premiers au système rhomboédrique, les seconds au système du prisme

droit à base carrée. Ils présentent donc un *axe principal de symétrie*, sénaire pour le quartz, quaternaire pour le sulfate de strychnine.

Ces cristaux possèdent la propriété de transmettre, parallèlement à l'axe principal, deux systèmes d'ondes polarisées circulairement et se propageant avec des vitesses différentes. Les phénomènes constatés dans les ondes transmises dans une direction perpendiculaire à l'axe ne diffèrent pas sensiblement de ceux qui se produisent dans les cristaux biréfringents homoédriques, tels que le spath.

2. La double réfraction circulaire donne lieu au phénomène connu sous le nom de *rotation du plan de polarisation*. Ce phénomène, que le quartz et le sulfate de strychnine présentent dans une direction parallèle à l'axe principal de symétrie, est produit dans toutes les directions par certains cristaux du système cubique, le chlorate de soude par exemple.

3. Les faits que nous venons de rappeler sont d'une haute importance, et ont depuis longtemps attiré l'attention des physiciens et des géomètres. D'après les découvertes de M. Pasteur, ils sont toujours associés à une certaine dissymétrie de la forme cristalline. Dans ses *Études cristallographiques*, Bravais a précisé le genre de dissymétrie qui est l'origine de ces phénomènes, en énonçant ce fait remarquable que *tous les cristaux connus jusqu'à ce jour comme doués du pouvoir rotatoire optique, appartiennent à la catégorie des cristaux hémisymétriques* [*].

Nous verrons, en effet, que tous les faits constatés par l'expérience et les lois qui le régissent se déduisent des équations relatives aux *cristaux hémisymétriques* possédant un axe principal de symétrie.

4. Les lois qui dérivent des équations propres aux cristaux dichosymétriques sont fort différentes.

La polarisation n'est jamais circulaire : elle est toujours rectiligne ou faiblement elliptique. Ce qui semble caractériser la *dichosymétrie*, c'est l'extinction plus ou moins grande de certaines radiations lumineuses.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 34e cahier, p. 222.

Les équations indiquent, par exemple, que les cristaux *dichosymétriques* du système *ternaire* ne peuvent transmettre que des ondes évanescentes parallèlement à l'axe principal de symétrie, et que des deux ondes propagées dans une direction perpendiculaire à l'axe, l'onde extraordinaire se propage sans s'affaiblir, et l'onde ordinaire est généralement évanescente.

Ces résultats de la théorie se constatent effectivement sur la tourmaline, dont les cristaux appartiennent à l'*hémiaxie dichosymétrique du système ternaire* [*]. On sait, en effet, qu'une plaque de tourmaline taillée perpendiculairement à l'axe éteint plus complétement la lumière qu'une plaque de même épaisseur taillée parallèlement à l'axe [**], et qu'une plaque à faces parallèles à l'axe, d'une assez faible épaisseur, éteint généralement le rayon ordinaire, et laisse passer le rayon extraordinaire.

5. Les équations relatives au sulfate de strychnine sont les équations (12) du tableau.

Celles du quartz sont en réalité les équations (9). En effet, bien que le quartz appartienne au système sénaire, ses cristaux sont *hémiaxes*, et la symétrie de sa molécule représentée par le symbole

$$(\Delta^3, 3L^2, oC, oP)$$

est *ternaire* [***]. Mais les termes par lesquels le système (9) diffère du système (12) sont évidemment négligeables quand les rayons transmis sont peu inclinés sur l'axe. Or, ces rayons seuls offrent des particularités importantes : on pourra par suite déduire les propriétés du quartz des équations (12).

Enfin les systèmes (10) et (15) du tableau correspondent à la tourmaline et à ceux des cristaux du système cubique (chlorate et bromate de soude, acétate d'urane, etc.) qui, d'après les expériences de M. Marbach, possèdent le pouvoir rotatoire.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 34e cahier, p. 244.

[**] Voir la *Cristallographie* de M. Des Cloizeaux.

[***] *Journal de l'École Polytechnique*, 34e cahier, p. 240.

6. Nous ajouterons que le tableau comprend aussi (système n° 6) les équations qui régissent les phénomènes optiques des cristaux hémisymétriques du système prismatique.

Ces équations sont assez simples, et ne renferment qu'un assez petit nombre de paramètres indéterminés.

Il sera intéressant de rechercher les lois qui s'en déduisent pour les comparer aux faits d'expérience auxquels donnent lieu certains cristaux, tels que le *formiate de strontiane*, étudié par M. Violette, l'asparagine, le glucosate de sel marin, etc., qui remplissent, suivant Bravais, les conditions de symétrie dont il s'agit.

Nous essayerons de le faire dans un autre travail. En se limitant aux faits qui ont été signalés précédemment, et à ceux qui font l'objet du Chapitre précédent, la théorie nous semble offrir un accord avec l'observation assez satisfaisant pour que les principes qui lui servent de base paraissent dignes de l'attention des physiciens

Les relations nouvelles qu'elle établit entre les phénomènes optiques des corps et leur forme cristalline nous paraissent particulièrement importantes, parce que leur vérification expérimentale doit être considérée comme une confirmation, non-seulement de la théorie des ondes, mais encore des conceptions sur lesquelles repose, dans l'état actuel de la science, l'explication des phénomènes et des lois cristallographiques.

Analyse.

7. *Holoaxie hémisymétrique des systèmes quaternaire et sénaire.* — Écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans les équations (12) du Chapitre III, et posant dans les mêmes équations

$$\omega = \frac{\sigma}{k}, \quad \alpha = kl, \quad \beta = km, \quad \gamma = kn,$$
$$\varphi = l\mathrm{P} + m\mathrm{Q} + n\mathrm{R},$$
$$\varepsilon = \omega^2 - f, \quad \varepsilon' = \omega^2 - g,$$

on obtient le système suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon \mathrm{P} = -fl\varphi + f_1 k(m\mathrm{R} - n\mathrm{Q}), \\ \varepsilon'\mathrm{Q} = -gm\varphi - k(g_1 n\mathrm{P} + g_2 l\mathrm{R}), \\ \varepsilon'\mathrm{R} = -gn\varphi + k(g_1 m\mathrm{P} + g_2 l\mathrm{Q}). \end{cases}$$

Par suite, P, Q, R, φ sont respectivement proportionnels aux quantités

$$f l \varepsilon'^2 + g_2 k^2 l [f g_2 l^2 + g f_1 (m^2 + n^2)],$$
$$g m \varepsilon\varepsilon' - k l n (g g_2 \varepsilon + f g_1 \varepsilon') - g_1 k^2 m [f g_2 l^2 + g f_1 (m^2 + n^2)],$$
$$g n \varepsilon\varepsilon' + k l m (g g_2 \varepsilon + f g_1 \varepsilon') - g_1 k^2 n [f g_2 l^2 + g f_1 (m^2 + n^2)],$$
$$- \varepsilon\varepsilon'^2 - g_2^2 k^2 l^2 \varepsilon + f_1 g_1 k^2 (m^2 + n^2) \varepsilon'.$$

Je pose

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= g_2 l^2 + f_1 (m^2 + n^2), \\ B &= g_2 l^2 - g_1 (m^2 + n^2), \\ \Delta &= g g_2 \varepsilon + f g_1 \varepsilon', \\ \delta &= g - f, \end{aligned} \right.$$

et je néglige le produit de deux paramètres f_1, g_1, g_2 multiplié par une des différences δ, ε, ε'; je trouve ainsi : 1° les rapports

$$(3) \quad \frac{P}{f l (\varepsilon'^2 + g_2 k^2 A)} = \frac{Q}{g m (\varepsilon\varepsilon' - g_1 k^2 A) - k l n \Delta} = \frac{R}{g n (\varepsilon\varepsilon' - g_1 k^2 A) + k l m \Delta} = \frac{\varphi}{- \varepsilon\varepsilon'^2};$$

2° l'équation caractéristique

$$(4) \qquad \varepsilon'^2 + \delta (m^2 + n^2) \varepsilon' + k^2 AB = 0.$$

8. Soit τ l'angle que la normale à l'onde plane fait avec l'axe de symétrie, on aura

$$l = \cos\tau, \quad \sqrt{m^2 + n^2} = \sin\tau,$$
$$A = g^2 \cos^2\tau + f_1 \sin^2\tau, \quad B = g_2 \cos^2\tau - g_1 \sin^2\tau,$$

et l'équation (4), résolue par rapport à ε', fournira les deux valeurs

$$2\varepsilon' = - \delta \sin^2\tau \pm \sqrt{\delta^2 \sin^4\tau - 4 k^2 AB},$$

le signe + correspondant à l'onde ordinaire et le signe — à l'onde extraordinaire.

Dans ces valeurs on peut, avec une approximation suffisante, remplacer k sous le radical par la valeur approchée $\sqrt{g}\,\sigma$ ou $\sqrt{g}\,si$, et

l'on obtient ainsi

$$(5)\qquad 2\varepsilon' = -\,\delta \sin^2\tau \pm \sqrt{\delta^2 \sin^4\tau + 4 g s^2 \mathrm{AB}}.$$

On voit aisément que, pour des rayons peu inclinés sur l'axe, les deux valeurs de ω qui résultent de la formule (5) sont réelles : par suite, les deux ondes se propagent sans extinction.

9. Par suite aussi, la valeur de k, correspondant à chacune des deux ondes, est imaginaire de la forme hi. Les rapports (3) peuvent donc s'écrire

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{P}}{fl\,(\varepsilon'^2 - g_2 h^2 \mathrm{A})} = \frac{\mathrm{Q}}{gm\,(\varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 \mathrm{A}) - hln\,\Delta i} = \frac{\mathrm{R}}{gn\,(\varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 \mathrm{A}) + hlm\,\Delta i} = \frac{\varphi}{-\,\varepsilon\varepsilon'^2}.$$

Ces expressions peuvent être transformées à l'aide de l'équation (4). On tire, en effet, de cette équation

$$\begin{aligned} \varepsilon'^2 - g_2 h^2 \mathrm{A} &= -\,(m^2 + n^2)\,[\delta\varepsilon' + h^2 (g_1 + g_2)\,\mathrm{A}], \\ \varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 \mathrm{A} &= \qquad l^2 \qquad [\delta\varepsilon' + h^2 (g_1 + g_2)\,\mathrm{A}]; \end{aligned}$$

par suite, en posant

$$(7)\qquad \lambda = \delta\varepsilon' + h^2 (g_1 + g_2)\,\mathrm{A},$$

il viendra

$$(8)\qquad \frac{\mathrm{P}}{-fl\,(m^2 + n^2)\,\lambda} = \frac{\mathrm{Q}}{gml^2\lambda - hln\,\Delta i} = \frac{\mathrm{R}}{gnl^2\lambda + hlm\,\Delta i} = \frac{\varphi}{-\,\varepsilon\varepsilon'^2},$$

ou bien, en désignant par τ l'angle que fait avec l'axe des x la normale à l'onde, et par ω l'azimut de cette ligne compté à partir du plan xoy,

$$(9)\qquad \frac{\mathrm{P}}{-f \sin\tau\,\lambda} = \frac{\mathrm{Q}}{g \cos\omega \cos\tau\,\lambda - h \sin\omega\,\Delta i} = \frac{\mathrm{R}}{g \sin\omega \cos\tau\,\lambda + h \cos\omega\,\Delta i}.$$

La polarisation qui résulte de ces formules est généralement elliptique. Pour étudier les lois de cette polarisation, nous négligerons le produit de deux des quantités f_1, g_1, g_2, et même celui d'une de ces

quantités par δ ou un paramètre de même ordre. En admettant cette approximation, on a les réductions suivantes.

10. *Onde extraordinaire.* — Nous réduisons les valeurs (7) et (2) de λ et Δ aux suivantes :

$$\lambda = \delta\varepsilon',$$
$$\Delta = g(g_2\varepsilon + g_1\varepsilon'),$$

et y remplaçons, au même degré d'approximation, $\varepsilon, \varepsilon'$ par leurs valeurs approchées

$$\varepsilon = \delta\cos^2\tau, \quad \varepsilon' = -\delta\sin^2\tau,$$

de sorte que

$$\Delta = g\delta(g_2\cos^2\tau - g_1\sin^2\tau) = g\delta\mathrm{B}.$$

Par suite, les formules (9) deviennent

$$(10)\qquad \frac{\mathrm{P}}{-f\sin\tau\,\varepsilon'} = \frac{\mathrm{Q}}{g(\cos\omega\cos\tau\,\varepsilon' - h\sin\omega\,\mathrm{B}i)} = \frac{\mathrm{R}}{g(\sin\omega\cos\tau + h\cos\omega\,\Delta i)}.$$

Tous les éléments de la trajectoire elliptique se déduisent comme on l'a observé (Chapitre I, n° 5) de la quantité $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2$, qui se réduit, dans le cas actuel, à la suivante :

$$\mathrm{M}e^{\theta i} = \varepsilon'^2(f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau) - g^2h^2\mathrm{B}^2,$$

d'où l'on tire évidemment

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{M} = \varepsilon'^2(f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau) - g^2h^2\mathrm{B}^2, \\ \theta = 0. \end{cases}$$

De plus, l'intensité du mouvement est donnée par la formule

$$(12)\qquad \mathrm{I} = \varepsilon'^2(f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau) + g^2h^2\mathrm{B}^2.$$

On aura donc, pour la valeur $\rho = \sqrt{\frac{\mathrm{I}-\mathrm{M}}{\mathrm{I}+\mathrm{M}}}$ du rapport du petit axe au grand

$$(13)\qquad \rho = \frac{gh\mathrm{B}}{\varepsilon'\sqrt{f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau}},$$

ou, approximativement,

$$\rho = \frac{hB}{\varepsilon'}. \tag{14}$$

L'argument θ se réduisant à zéro, les projections du demi-petit axe sont représentées par les coefficients de i dans P, Q, R. D'après les valeurs (10), ces projections sont proportionnelles à

$$0, \quad \sin\omega, \quad -\cos\omega,$$

d'où l'on déduit immédiatement :

Que le petit axe de l'ellipse est perpendiculaire à l'axe principal de symétrie et est compris dans le plan de l'onde, de sorte qu'il est perpendiculaire au plan déterminé par la normale à l'onde plane et l'axe de symétrie.

Pour achever de déterminer les éléments du mouvement elliptique, il suffit de calculer l'angle V que le plan de la trajectoire fait avec le plan de l'onde. On obtient cet angle en déduisant préalablement des formules (10) les cosinus des angles que la normale au plan des deux axes de l'ellipse fait avec les angles des coordonnées. On trouve ainsi

$$\sin V = \frac{1}{2} \frac{(g-f)\sin^2\tau}{\sqrt{f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau}}.$$

Par suite, au degré d'approximation adopté, l'angle du plan de l'ellipse avec l'onde plane extraordinaire se confond avec celui que forme, dans les cristaux homoédriques, la vibration rectiligne extraordinaire avec le plan de l'onde.

11. *Onde ordinaire.* — Désignant par ε'_1 la racine de l'équation (4) qui correspond à l'onde ordinaire, et par ε' celle qui se rapporte à l'onde extraordinaire, on a

$$\varepsilon'\varepsilon'_1 = -h^2 AB.$$

Par suite, la valeur (7) de λ relative à l'onde extraordinaire peut être

mise sous la forme

$$\lambda = \frac{-\delta h^2 AB + \varepsilon' h^2 (g_1 + g_2) A}{\varepsilon'}.$$

Remplaçant au numérateur ε' par sa valeur approchée $-\delta \sin^2\tau$ et B par sa valeur $g_2 \cos^2\tau - g_1 \sin^2\tau$, on obtient

$$(15) \qquad \lambda = -\frac{\delta h^2 g_2 A}{\varepsilon'}.$$

Quant à la valeur de Δ, elle peut être réduite dans l'approximation adoptée à

$$(16) \qquad \Delta = g g_2 \delta.$$

En tenant compte des valeurs (15) et (16) de λ et Δ, les rapports (9) deviennent

$$(17) \quad \frac{P}{-fh \sin\tau A} = \frac{Q}{g(h \cos\omega \cos\tau A + \varepsilon' \sin\omega i)} = \frac{R}{g(h \sin\omega \cos\tau A - \varepsilon' \cos\omega i)}.$$

La quantité $P^2 + Q^2 + R^2$ devient alors

$$h^2 A^2 (f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau) - g^2 \varepsilon'^2,$$

de sorte que l'on a

$$(18) \quad \begin{cases} M = g^2 \varepsilon'^2 - h^2 A^2 (f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau), \\ \theta = \pi. \end{cases}$$

Dans ce cas, le rapport du petit axe au grand est donné par la formule

$$(19) \qquad \rho = \frac{g\varepsilon'}{hA\sqrt{f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau}},$$

ou approximativement

$$(20) \qquad \rho = \frac{\varepsilon'}{hA}.$$

L'argument θ étant égal à π, on aura $e^{-\frac{i\theta}{2}} = -i$. Donc d'après le

théorème général du Chapitre I les projections du demi-grand axe sont les parties réelles des trois quantités que l'on obtient en multipliant par $-i$ les quantités auxquelles les constantes P, Q, R sont proportionnelles d'après les relations (17). On en conclut que la direction du grand axe de la trajectoire elliptique ordinaire coïncide avec le petit axe de la trajectoire elliptique extraordinaire.

12. Le sens du mouvement elliptique dans chacun des deux rayons dépend, comme on l'a vu (Chap. I, n° **8**), du signe du coefficient de i dans le rapport $\frac{Q}{P}$. Ce coefficient est égal à $\frac{gh \sin \omega}{f \sin \tau} \frac{B}{\varepsilon'}$ pour le rayon extraordinaire, et à $-\frac{g \sin \omega}{fh \sin \tau} \frac{\varepsilon'}{A}$ pour le rayon ordinaire. D'ailleurs, pour des valeurs de τ voisines de zéro, le signe de B et celui de A sont égaux à celui de $g_2 \cos^2 \tau$. Donc, le mouvement elliptique s'effectue en sens inverse dans les ondes ordinaire et extraordinaire.

13. En résumé, on voit que dans les cristaux hémisymétriques qui ont un axe principal :

1° Deux ondes planes peuvent se propager dans la même direction avec des vitesses différentes données par la formule

$$\omega^2 = g - \frac{\delta \sin^2 \tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2 \sin^4 \tau}{4} + g s^2 AB}, \tag{21}$$

le signe + appartenant à l'onde ordinaire, et le signe — à l'onde extraordinaire;

2° Les deux ondes planes qui peuvent se propager dans une direction inclinée sur l'axe principal sont polarisées elliptiquement.

Le grand axe de la vibration ordinaire est perpendiculaire à la section principale. Le plan de la trajectoire se confond avec celui de l'onde.

La direction du petit axe de la vibration extraordinaire se confond avec celle du grand axe de la vibration ordinaire. Le plan de la trajectoire fait avec le plan de l'onde un angle très-petit déterminé par la formule

$$\sin V = \frac{1}{2} \frac{\delta \sin^2 \tau}{\sqrt{f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau}}, \tag{22}$$

3° Le rapport du petit axe au grand, dans les ondes ordinaire et extraordinaire, est donné par les formules

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= \frac{\varepsilon'}{h(g_2\cos^2\tau + f_1\sin^2\tau)},\\ \rho' &= \frac{h(g_2\cos^2\tau - g_1\sin^2\tau)}{\varepsilon'},\\ 2\varepsilon' &= -\delta\sin^2\tau - \sqrt{\delta^2\sin^2\tau + 4gs^2(g_2\cos^2\tau + f_1\sin^2\tau)(g_2\cos^2\tau - g_1\sin^2\tau)}. \end{aligned}\right.$$

Le rapport des axes diminue à mesure que la direction des ondes s'éloigne de l'axe principal.

Pour les ondes dont la direction est peu inclinée sur l'axe, les deux valeurs de ρ satisfont sensiblement à la relation

$$\rho\rho' = 1.$$

Enfin, les deux ondes sont polarisées en sens contraires.

14. En supposant $\tau = 0$, les formules (23) donnent $\varepsilon' = hg_2\cos^2\tau$, $\rho = \rho' = 1$. Donc les ondes propagées parallèlement à l'axe principal de symétrie sont polarisées *circulairement*.

Il est remarquable que ce résultat soit indépendant de toute hypothèse sur la constitution de l'éther, et soit la conséquence nécessaire de la modification particulière de la forme cristalline que Bravais a désignée sous le nom d'hémisymétrie.

Si on considère, en effet, les équations générales des vibrations de l'éther renfermé dans un cristal hémisymétrique doué d'un axe principal de symétrie, sous la forme que nous leur avons trouvée dans notre premier Mémoire, on voit qu'elles se réduisent aux suivantes pour les ondes perpendiculaires à l'axe

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f_1 u,\\ \sigma^2 v &= g_2 v - G_2\alpha w,\\ \sigma^2 w &= g_2 w + G_2\alpha v; \end{aligned}\right.$$

f_1, g_2, G_2 désignant nécessairement des fonctions de α^2. Par suite, les propriétés des ondes planes se déduisent des relations obtenues en

écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans les équations ci-dessus. Or, si on ajoute ces relations respectivement multipliées par P, Q, R, on obtient la condition nécessaire et suffisante de la polarisation circulaire $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$.

15. M. Airy a démontré le premier que dans le quartz les rayons inclinés sur l'axe sont polarisés elliptiquement. Il a montré que les faits observés s'expliquent en admettant que les vibrations s'exécutent en sens inverse suivant deux ellipses dont les grands axes sont à angle droit, et qui s'allongent de plus en plus quand la direction des rayons s'éloigne de l'axe [*].

Les formules de la théorie confirment cette hypothèse, et donnent le rapport des axes dans chaque ellipse et la différence de marche des deux rayons. Elles concordent avec celles que Cauchy a données pour les rayons peu inclinés sur l'axe, et que M. Jamin a vérifiées par ses belles recherches expérimentales [**].

16. *Hémiaxie dichosymétrique du système ternaire.* — On déduit des équations (10) du tableau (Chap. III), le système suivant

$$(25)\quad \begin{cases} \varepsilon P = -fl\varphi + f_1 k(mQ + nR), \\ \varepsilon' R = -gm\varphi + k(g_1 mP + g_2 lQ) + h_1 k(mQ - nR), \\ \varepsilon' Q = -gn\varphi + k(g_1 nP + g_2 lR) - h_1 k(mR + nQ). \end{cases}$$

En négligeant les produits deux à deux des coefficients des termes du troisième ordre, on peut remplacer dans ces termes P, Q, R par les valeurs que prennent ces quantités, quand on ne prend que les termes du second ordre.

En opérant ainsi, on obtient le résultat que voici :

17. 1° *Onde ordinaire.* — Une première approximation donne

$$P = 0, \quad \varphi = 0.$$

---

[*] Transactions de Cambridge, 1832.

[**] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXX.

Introduisant ces valeurs dans les termes du troisième ordre, il vient

$$(26)\quad \begin{cases} \varepsilon P = -fl\varphi \\ \varepsilon' Q = -gm\varphi + g_2 klQ + h_1 k(mQ - nR), \\ \varepsilon' R = -gn\varphi + g_2 klR - h_1 k(mR + nQ). \end{cases}$$

D'ailleurs, au même degré d'approximation, on déduit de l'équation $mQ + nR = 0$, les relations

$$\frac{Q}{n} = \frac{R}{-m} = \frac{mQ - nR}{2mn} = \frac{mR + nQ}{-m^2 + n^2} = \frac{nQ - mR}{m^2 + n^2},$$

qui permettent d'écrire la deuxième et la troisième des équations (26), sous la forme suivante

$$\varepsilon' Q = -gm\varphi + g_2 klQ + h_1 k\frac{2mn}{m^2 + n^2}(nQ - mR),$$

$$\varepsilon' R = -gn\varphi + g_2 klR + h_1 k\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}(nQ - mR).$$

En multipliant la première de ces nouvelles équations par n, la deuxième par m, et retranchant les résultats l'un de l'autre, on a l'équation caractéristique

$$(27)\qquad \omega^2 = g + g_2 kl + h_1 k\frac{3mn^2 - m^3}{m^2 + n^2}.$$

18. 2° *Onde extraordinaire.* — Multiplions la première équation (26) par ε, et les deux autres par ε'. Dans les résultats, substituons aux P, Q, R des termes du troisième ordre ainsi qu'à ε, ε' leurs valeurs approchées tirées des formules (21), (22) et (24) du Chapitre IV. Négligeons enfin les produits de f_1, g_1, g_2, h_1 par $\delta = g - f$. Il vient

$$(28)\quad \begin{cases} \varepsilon\varepsilon' P = -[fl\varepsilon' + gf_1 k(m^2 + n^2)]\varphi, \\ \varepsilon\varepsilon' Q = -\left[gm\varepsilon + gg_1 klm + gg_2 k\dfrac{l^2 m}{m^2 + n^2} + gh_1 k\dfrac{l^2(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}\right]\varphi, \\ \varepsilon\varepsilon' R = -\left[gn\varepsilon + gg_1 kln + gg_2 k\dfrac{l^2 n}{m^2 + n^2} - gh_1 k\dfrac{2l^2 mn}{m^2 + n^2}\right]\varphi, \end{cases}$$

et on en déduit l'équation caractéristique

$$(29)\quad \omega^2 = f + \delta l^2 - (f_1 + g_1) kl (m^2 + n^2) + g_2 kl^3 + h_1 k \frac{l^2 (m^3 - 3mn^2)}{m^2 + n^2}.$$

19. Soit τ l'angle de la normale à l'onde avec ox, et ω son azimut.

$$l = \cos\tau, \quad m = \sin\tau\cos\omega, \quad n = \sin\tau\sin\omega,$$

les équations (27) et (29) deviennent

$$(30)\qquad \omega^2 = g + k(g_2\cos\tau - h_1 \sin\tau\cos 3\omega),$$

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega^2 &= f + \delta\cos^2\tau \\ &\quad + k\cos\tau[g_2\cos^2\tau - (f_1 + g_1)\sin^2\tau + h_1\sin\tau\cos\tau\cos 3\omega]. \end{aligned} \right.$$

Pour qu'une onde plane persistante se propage sans s'affaiblir, il faut que k soit de la forme hi et la valeur de ω réelle. Or les équations (30) et (31) ne peuvent être satisfaites par de pareilles valeurs de k et ω. Les ondes sont donc généralement évanescentes.

Mais si on suppose $\cos\tau = 0$, c'est-à-dire si le plan de l'onde est parallèle à l'axe principal, le coefficient de k s'annule dans l'équation (31). Dans la même hypothèse, il ne s'annule pas dans l'équation (30).

Donc une *onde plane ordinaire* parallèle à l'axe est généralement évanescente, et une *onde plane extraordinaire* peut se propager sans s'affaiblir.

Une onde plane ordinaire peut cesser d'être évanescente, d'après la formule (30), quand on a $\cos\tau = 0$, $\cos 3\omega = 0$, c'est-à-dire quand elle est parallèle à l'axe principal et perpendiculaire à un des trois plans de symétrie de l'assemblage. Il serait intéressant de rechercher expérimentalement les phénomènes que présente une tourmaline dans ces conditions.

20. *Holoaxie hémisymétrique du système terquaternaire.* [Équations (15) du tableau]. — Les propriétés des ondes planes résultent des équations

$$(32)\qquad \left\{ \begin{aligned} (\omega^2 - f)\,P &= -fl\,\varphi + f_1 k(nQ - mR), \\ (\omega^2 - f)\,Q &= -fm\varphi + f_1 k(lR - nP), \\ (\omega^2 - f)\,R &= -fn\,\varphi + f_1 k(mP - lQ). \end{aligned} \right.$$

En ajoutant ces équations multipliées par l, m, n, il vient

$$\omega^2\varphi = 0$$

d'où $\omega^2 = 0$ ou bien $\varphi = 0$. Cette dernière condition est celle des ondes lumineuses. En l'introduisant dans (32), on a

$$(33)\quad \begin{cases} (\omega^2 - f)\,\mathrm{P} = f_1 k\,(n\,\mathrm{Q} - m\mathrm{R}), \\ (\omega^2 - f)\,\mathrm{Q} = f_1 k\,(l\,\mathrm{R} - n\,\mathrm{P}), \\ (\omega^2 - f)\,\mathrm{R} = f_1 k\,(m\mathrm{P} - l\,\mathrm{Q}). \end{cases}$$

Des deux premières équations (3), on tire les relations

$$(34)\quad \frac{\mathrm{P}}{f_1^2 k^2 ln - (\omega^2 - f) f_1 km} = \frac{\mathrm{Q}}{f_1^2 k^2 mn + (\omega^2 - f) f_1 kl} = \frac{\mathrm{R}}{f_1^2 k^2 n^2 + (\omega^2 - f)^2},$$

qui, en ayant égard à $l\mathrm{P} + m\mathrm{Q} + n\mathrm{R} = 0$ donnent l'équation caractéristique

$$(35)\quad (\omega^2 - f)^2 + f_1^2 k^2 = 0$$

qui pour une valeur de k de la forme hi fournit deux valeurs réelles de ω. Le milieu propage donc sans extinction, avec des vitesses différentes, deux ondes planes dans la même direction.

21. La polarisation se déduit immédiatement des équations (33) qui entrainent la relation $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2 = 0$. Elle est donc *circulaire*.

D'ailleurs, en tenant compte de l'équation (35), les relations (34) deviennent

$$(36)\quad \frac{\mathrm{P}}{ln \mp mi} = \frac{\mathrm{Q}}{mn \pm li} = \frac{\mathrm{R}}{n^2 - 1}.$$

Le signe du coefficient de i dans le rapport $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$ change donc quand on passe d'une des deux ondes à l'autre. Par suite, les deux ondes sont polarisées en sens contraires.

En résumé, les cristaux holoaxes hémisymétriques du système terquaternaire propagent dans toutes les directions deux ondes planes polarisées ciculairement en sens inverse et possédant des vitesses de propagation différentes. De là résulte le pouvoir rotatoire.

SUR LA RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE

DES

ÉQUATIONS PRIMITIVES DE DEGRÉ p^2

(p ÉTANT PREMIER IMPAIR);

PAR M. CAMILLE JORDAN,
Ingénieur des Mines.

Nous avons établi dans un précédent Mémoire (t. XII de ce journal, 2e série) que le groupe de toute équation primitive et soluble par radicaux de degré p^2 s'obtient en combinant aux substitutions de la forme $\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}$ un groupe $\mathfrak{L}$ de substitutions de la forme linéaire $\begin{vmatrix} x & ax+by \\ y & a'x+b'y \end{vmatrix}$.

Nous démontrerons ici que les groupes des équations cherchées se ramènent tous à l'un des trois types suivants :

Premier type. — Il contient $2(p-1)^2p^2$ substitutions dérivées des suivantes :

$$E = \begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} x & mx \\ y & m'y \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix},$$

les constantes α et α' prenant, dans les diverses substitutions du groupe, toutes les valeurs de la suite $0, 1, \ldots, p-1$, et m, m' prenant chacune la suite des valeurs $1, \ldots, p-1$.

Deuxième type. — Il contient $2(p^2-1)p^2$ substitutions dérivées des suivantes :

$$E = \begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} x & \gamma x+\delta e y \\ y & \delta x+\gamma y \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix},$$

e étant un résidu quadratique de p choisi arbitrairement; $\alpha, \alpha', \ldots$ variant chacun de 0 à $p-1$, ainsi que γ et δ, en excluant seulement le système de valeurs $\gamma = 0$, $\delta = 0$.

Troisième type. — Il contient $24(p-1)p^2$ substitutions, et change de forme suivant que $p \equiv 1$ ou $\equiv 3 \pmod{4}$.

1° Si $p \equiv 1 \pmod{4}$, il est dérivé des substitutions suivantes :

$$E = \begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}, \quad M_1 = \begin{vmatrix} x & jx \\ y & -jy \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} x & x-jy \\ y & x+jy \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} x & ax \\ y & ay \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} x & jy \\ y & jx \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} x & x+y \\ y & x-y \end{vmatrix},$$

j étant une racine de la congruence $j^2 \equiv -1 \pmod{p}$; α, α' variant de 0 à $p-1$, et a de 1 à $p-1$.

2° Si $p \equiv 3 \pmod{4}$, il est dérivé des substitutions suivantes :

$$E = \begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}, \quad M_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} x & ax \\ y & ay \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} x & sx+ty \\ y & tx-sy \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} x & -(1+st)x+(s-t^2)y \\ y & (t+s^2)x+(st-s-t)y \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} x & sx+(t+1)y \\ y & (t-1)x-sy \end{vmatrix},$$

s et t étant deux entiers arbitrairement choisis parmi ceux qui satisfont à la congruence $s^2+t^2 \equiv -1 \pmod{p}$; α, α', a variant comme précédemment.

Réciproquement, les trois types de groupes ci-dessus appartiennent à des équations primitives solubles par radicaux; ils sont en outre généraux et distincts, sauf les cas d'exception suivants :

1° Si $p = 3$, le premier et le deuxième type sont contenus dans le troisième, qui est seul général;

2° Si $p = 5$, le premier type est contenu dans le troisième.

Galois avait annoncé que les équations primitives et solubles par radicaux rentreraient dans un type unique, sauf pour le neuvième et le vingt-cinquième degré, qui présenteraient certains types exceptionnels. On voit par les énoncés qui précèdent qu'il faut prendre presque exactement le contre-pied de cette assertion.

La méthode dont nous ferons usage pour établir ces propositions s'applique, avec quelques modifications, aux équations primitives d'un degré quelconque. Nous réserverons cette généralisation pour un ouvrage spécial. Il nous suffit présentement de mettre en évidence, par un exemple simple, le fait de la pluralité des types généraux d'équations résolubles.

I.

1. Soient $z \equiv mx + ny \pmod{p}$, $u \equiv m'x + n'y \pmod{p}$ deux fonctions linéaires de x et de y telles, que le déterminant $\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}$ ne se réduise pas à $0 \pmod{p}$. A chaque système de valeurs de x, y correspondra un système de valeurs de z, u, et réciproquement. Cela posé, au lieu de caractériser les diverses racines de l'équation proposée par les valeurs de x, y qui leur correspondent respectivement, on pourra les caractériser par les valeurs de z, u. Voyons ce que deviennent, après ce changement d'indices, les substitutions du groupe de l'équation.

La substitution $\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}$, accroissant x et y respectivement de α et α', accroîtra z de $m\alpha + n\alpha'$ et u de $m'\alpha + n'\alpha'$; elle prendra donc la forme $\begin{vmatrix} z & z + m\alpha + n\alpha' \\ u & u + m'\alpha + n'\alpha' \end{vmatrix}$. Si l'on fait varier α et α', $m\alpha + n\alpha'$ et $m'\alpha + n'\alpha'$ prendront successivement tous les systèmes de valeurs possibles. Le faisceau formé par les substitutions $\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}$ conservera donc sa forme après le changement d'indices.

Considérons maintenant une substitution S de la forme

$$\begin{vmatrix} x & ax + by \\ y & a'x + b'y \end{vmatrix}.$$

Elle remplace z par

$$m(ax+by)+n(a'x+b'y)$$

et u par

$$m'(ax+by)+n'(a'x+b'y).$$

D'ailleurs x et y sont des fonctions linéaires de z, u; donc la substitution considérée remplace z et u par des fonctions linéaires de ces quantités; mais ces fonctions linéaires contiennent les indéterminées m, n, m', n', dont on peut profiter pour simplifier la nouvelle expression de S.

Or il existe en général deux fonctions distinctes, que S multiplie chacune par un simple facteur constant. En effet, pour que $z'\equiv mx+ny$ jouisse de cette propriété, il faudra que l'on ait

$$m(ax+by)+n(a'x+b'y)\equiv kz\equiv k(mx+ny),$$

k étant ce facteur constant; d'où les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} ma+na'\equiv km, \\ mb+nb'\equiv kn, \end{cases}$$

qui détermineront le rapport $\frac{m}{n}$, pourvu qu'on prenne pour k une racine de la congruence

$$\begin{vmatrix} a-k & a' \\ b & b'-k \end{vmatrix}\equiv 0 \pmod{p}.$$

1° Si cette congruence a deux racines réelles, α et β, il existera deux fonctions, z, u, que S multipliera respectivement par α et β; en les prenant pour indices à la place de z et de u, on aura ramené S à la forme $\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}$.

2° Si ces racines sont imaginaires, soit i une racine d'une congruence irréductible du second degré choisie arbitrairement, celle-ci, par exemple,

$$\xi^2\equiv e \pmod{p},$$

e étant un non-résidu quadratique de p pris à volonté; les deux racines de l'équation en k seront des entiers complexes conjugués, $\alpha+\beta i$ et $(\alpha+\beta i)^p \equiv \alpha+\beta i^p$, formés avec cette imaginaire; les valeurs correspondantes de $\frac{m}{n}$, déterminées par les relations (1), seront elles-mêmes des imaginaires conjuguées; les deux fonctions z et u seront donc respectivement égales à $X+iY$ et à $X+i^pY$, X et Y étant des fonctions linéaires réelles de x, y; et S, rapporté à ces nouveaux indices, sera de la forme $\begin{vmatrix} z & (\alpha+\beta i)z \\ u & (\alpha+\beta i^p)u \end{vmatrix}$,

3° Si les racines de la congruence (1) sont égales, il n'existe qu'une seule fonction z que S multiplie par un facteur constant. Soit u une autre fonction quelconque de x et y, S prendra la forme

$$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z+\gamma u \end{vmatrix}.$$

On a d'ailleurs $\gamma=\alpha$, sans quoi la congruence

$$\begin{vmatrix} \alpha-k & 0 \\ \beta & \gamma-k \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}$$

aurait ses racines inégales, et il y aurait contre l'hypothèse deux fonctions de z, u, ou, ce qui revient au même, de x, y, que S multiplierait par un facteur constant.

Nous obtenons donc ce premier résultat :

Toute substitution linéaire S *peut être ramenée par un choix d'indices convenable à l'une des trois formes canoniques suivantes :*

$$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & (\alpha+\beta i)z \\ u & (\alpha+\beta i^p)u \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z+\alpha u \end{vmatrix}.$$

2. Cela posé, les substitutions $\mathfrak{L}$ formant un groupe résoluble, on pourra y déterminer un faisceau F de substitutions échangeables entre elles, et auquel toutes les substitutions $\mathfrak{L}$ seront permutables (*voir* le Mémoire cité, Chap. I[er], théor. IV). S'il y a plusieurs manières de déterminer un premier faisceau F satisfaisant aux deux conditions ci-dessus,

on peut admettre qu'il ait été choisi de manière à contenir le plus grand nombre possible de substitutions. Il contiendra, dans ce cas, toutes les substitutions qui multiplient les deux indices x et y par un même facteur constant.

Soit en effet Σ une de ces substitutions : elle est évidemment échangeable à toute substitution linéaire. Soient, d'autre part, Q, R,... les substitutions qui, étant adjointes successivement à F, reproduisent le groupe $\mathfrak{L}$. Le groupe dérivé des substitutions Σ, F, Q, R,... est évidemment résoluble et contient toutes les substitutions de $\mathfrak{L}$; mais, par hypothèse, il ne peut être plus général : donc il se confond avec $\mathfrak{L}$. En outre, le faisceau (Σ, F) a ses substitutions échangeables entre elles; il est permutable à toutes les substitutions de $\mathfrak{L}$; il jouit donc des propriétés qui caractérisent F, et serait plus général, contrairement à l'hypothèse faite, si F ne contenait pas Σ.

Il peut se faire : 1° que F ne contienne d'autres substitutions que celles de la forme Σ; 2° ou qu'il en contienne quelque autre, S. Ce dernier cas peut se subdiviser en trois autres, suivant la forme canonique à laquelle se réduit S.

5. Premier cas. — S *est réductible à la forme* $\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}$, *α étant* $\gtrless \beta$.

Soit $T = \begin{vmatrix} z & az + bu \\ u & b'z + a'u \end{vmatrix}$ une autre substitution quelconque de F : elle doit être échangeable à S; d'où les relations

$$a\alpha z + b\beta u \equiv \alpha(az + bu),$$
$$b'\alpha z + a'\beta u \equiv \beta(b'z + a'u),$$

lesquelles doivent être identiques, quels que soient z et u. On aura en particulier $b\beta \equiv \alpha b$, $b'\alpha \equiv \beta b'$, d'où $b \equiv 0$, $b' \equiv 0$. T se réduira donc à la forme $\begin{vmatrix} z & az \\ u & a'u \end{vmatrix}$.

Soit $U = \begin{vmatrix} z & mz + nu \\ u & n'z + m'u \end{vmatrix}$ une substitution quelconque de $\mathfrak{L}$: elle est permutable à F; donc $U^{-1}SU = T$ ou $SU = UT$, T étant une substitution de la forme que nous venons de déterminer : égalité qui

donne les relations

$$m\alpha z + n\beta u = a(mz + nu),$$
$$n'\alpha z + m'\beta u = a'(n'z + m'u),$$

d'où

$$(a-\alpha)m = (a-\beta)n = (a'-\alpha)n' = (a'-\beta)m' = 0.$$

Si $(a-\alpha) \gtrless 0$, on aura $m = 0$, et le déterminant $mm' - nn'$ ne pouvant s'annuler, on aura $nn' \gtrless 0$; donc $a' - \alpha = 0$ et $a' - \beta \gtrless 0$, d'où $m' = 0$.

Si $a - \alpha = 0$, on aura $a - \beta \gtrless 0$, d'où $n = 0$, et par suite $m' \gtrless 0$, d'où $a' - \beta = 0$, $a' - \alpha \gtrless 0$, et enfin $n' = 0$.

Les substitutions de $\mathfrak{L}$ seront donc toutes de l'une des formes générales

$$\begin{vmatrix} z & mz \\ u & m'u \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & nu \\ u & n'z \end{vmatrix}.$$

Réciproquement, l'ensemble des substitutions de ces deux formes constitue un groupe résoluble, car il s'obtient en combinant aux substitutions du faisceau $\begin{vmatrix} z & mz \\ u & m'u \end{vmatrix}$, lesquelles sont échangeables entre elles, la substitution $\begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$, qui lui est permutable.

On a ainsi un premier type d'équations solubles par radicaux, dont le groupe s'obtient en combinant ensemble les substitutions

$$\begin{vmatrix} z & mz + \alpha \\ u & m'u + \alpha' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}.$$

L'ordre de ce groupe est évidemmennt égal à $2(p-1)^2p^2$, α et α' pouvant prendre toutes les valeurs $0, 1, \ldots, p-1$, et m, m' les valeurs $1, \ldots, p-1$.

Par l'extraction d'une racine carrée on pourra réduire ce groupe aux seules substitutions $\begin{vmatrix} z & mz + \alpha \\ u & m'u + \alpha' \end{vmatrix}$. Ce groupe réduit n'étant plus primitif, la résolution de l'équation pourra se ramener à la résolution successive de deux équations du degré p.

4. Deuxième cas. — S *est réductible à la forme* $\begin{vmatrix} z & (\alpha+\beta i)z \\ u & (\alpha+\beta i^p)z \end{vmatrix}$.

Les deux quantités conjuguées $\alpha+\beta i$, $\alpha+\beta i^p$ étant supposées imaginaires, et par suite distinctes, on voit, comme au cas précédent, que les substitutions de $\mathfrak{L}$ se réduisent toutes à l'une des deux formes

$$\begin{vmatrix} z & mz \\ u & m'u \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} z & nu \\ u & n'z \end{vmatrix}.$$

Mais ici les indices z et u, exprimés en fonction des indices primitifs, contiennent l'imaginaire i. Les facteurs m, m', n, n', au lieu d'être des entiers réels, comme tout à l'heure, pourront contenir l'imaginaire i. Soit donc

$$m=\gamma+\delta i, \quad n=\varepsilon+\zeta i,$$

on aura nécessairement

$$m'\equiv\gamma+\delta i^p\equiv m^p, \quad n'=\varepsilon+\zeta i^p\equiv n^p.$$

Car il est clair qu'une substitution réelle ne peut remplacer z par $(\gamma+\delta i)z$ ou par $(\varepsilon+\zeta i)u$ sans remplacer en même temps l'indice conjugué u par la fonction conjuguée $(\gamma+\delta i^p)u$ ou $(\varepsilon+\zeta i^p)z$. Les substitutions de $\mathfrak{L}$ seront donc de l'une des formes suivantes :

$$\begin{vmatrix} z & mz \\ u & m^p u \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} z & nu \\ u & n^p z \end{vmatrix},$$

m et n étant des entiers complexes $\gamma+\delta i$, $\varepsilon+\zeta i$.

Réciproquement, le groupe formé par l'ensemble de ces substitutions est résoluble; car ses substitutions s'obtiennent évidemment en ajoutant à celles de la première forme, qui sont échangeables entre elles, la substitution $\begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$, qui les permute les unes dans les autres.

Le groupe $\mathfrak{L}$, ainsi obtenu, a son ordre égal à $2(p^2-1)$. En effet, γ et δ peuvent prendre tous les systèmes de valeurs possibles (pourvu qu'ils ne soient pas nuls à la fois) sans annuler le déterminant

$$(\gamma+\delta i)(\gamma+\delta i^p).$$

On peut donc les choisir de p^2-1 manières différentes; de même pour ε et ζ.

On peut d'ailleurs très-aisément chasser les imaginaires de l'expression de ses substitutions. En effet, la substitution $\begin{vmatrix} z & (\gamma+\delta i)z \\ u & (\gamma+\delta i^p)u \end{vmatrix}$, remplaçant $z=X+iY$ par $(\gamma+\delta i)(X+iY)$, et la fonction conjuguée $u=X+i^pY$ par la fonction conjuguée $(\gamma+\delta i^p)(X+i^pY)$, remplacera évidemment X et Y par la partie réelle et par la partie imaginaire de $(\gamma+\delta i)(X+iY)$, soit respectivement par $\gamma X+\delta eY$ et $\delta X+\gamma Y$. Cette substitution, rapportée aux indices indépendants X, Y, prendra donc la forme $\begin{vmatrix} X & \gamma X+\delta eY \\ Y & \delta X+\gamma Y \end{vmatrix}$. De même la substitution $\begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$, remplaçant $X+iY$ par $X+i^pY\equiv X-iY$ et réciproquement, prendra la forme $\begin{vmatrix} X & X \\ Y & -Y \end{vmatrix}$.

Combinant aux substitutions ci-dessus les suivantes :

$$\begin{vmatrix} X & X+\alpha \\ Y & Y+\alpha' \end{vmatrix},$$

on obtiendra un groupe contenant $2(p^2-1)p^2$ substitutions et caractérisant un second type d'équations solubles par radicaux.

5. Troisième cas. — S *est réductible à la forme* $\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z+\alpha u \end{vmatrix}$ (β *étant* $\gtrless 0$).

Soit $T=\begin{vmatrix} z & az+bu \\ u & b'z+a'u \end{vmatrix}$ une substitution quelconque de F : elle sera échangeable à S; d'où les relations

$$a\,\alpha z+b\,(\beta z+\alpha u)\equiv\alpha\,(az+bu)$$
$$b'\alpha z+a'(\beta z+\alpha u)\equiv\beta\,(az+bu)+\alpha\,(b'z+a'u),$$

d'où l'on déduit $b=0$. Les substitutions de F sont donc toutes de la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} z & az \\ u & b'z+a'u \end{vmatrix}.$$

Soit maintenant $U = \begin{vmatrix} z & mz + nu \\ u & n'z + m'u \end{vmatrix}$ une substitution quelconque de $\mathfrak{L}$, on aura $SU = UT$, T étant une substitution de la forme que nous venons de déterminer, ce qui fournit les relations

$$m\alpha z + n(\beta z + \alpha u) \equiv a(mz + nu),$$
$$n'\alpha z + m'(\beta z + \alpha u) \equiv b'(mz + nu) + a'(n'z + m'u),$$

d'ou

$$m(\alpha - a) + \beta n \equiv 0, \quad n(\alpha - a) \equiv 0, \text{ etc.}, \quad \text{d'où enfin} \quad n \equiv 0.$$

Les substitutions $\mathfrak{L}$ sont donc toutes de la forme

$$\begin{vmatrix} z & mz \\ u & n'z + m'u \end{vmatrix}.$$

Mais ce groupe, combiné avec les substitutions $\begin{vmatrix} z & z + \alpha \\ u & u + \alpha' \end{vmatrix}$, ne donnera pas un groupe primitif; car si l'on réunit dans un même système les diverses racines qui correspondent à une même valeur de z, il est clair que chacune des substitutions considérées remplacera les racines d'un système par celles d'un même système.

On doit donc rejeter l'hypothèse ci-dessus.

6. Quatrième cas. — F *est formé des seules substitutions* Σ.

On sait qu'on peut déterminer dans $\mathfrak{L}$ un second faisceau G tel, 1° que les substitutions $\mathfrak{L}$ lui soient permutables; 2° qu'il contienne F; 3° que ses substitutions soient échangeables entre elles aux F près (*voir* le Mémoire déjà cité, Chap. Ier, théorème IV).

Si ce faisceau G peut être choisi de plusieurs manières, nous ferons en sorte qu'il contienne le moindre nombre possible de substitutions.

Dans cette hypothèse, soient S_1 une substitution quelconque de G, $S_2, S_3, \ldots$ ses transformées par les diverses substitutions de $\mathfrak{L}$; le faisceau dérivé de $(F, S_1, S_2, \ldots)$ satisfait évidemment aux trois relations qui caractérisent G; il est contenu en outre dans G, et comme il ne peut être moins général, il se confond avec lui.

Parmi les substitutions $S_2, \ldots$, il en existe une au moins non échan-

geable à S_1, car s'il n'en est pas ainsi, soit φ le faisceau formé par celles des substitutions de G qui jouissent ainsi que F et S_1 de la propriété d'être échangeables à toutes les substitutions G, elles sont échangeables entre elles; d'ailleurs les substitutions $\mathfrak{L}$ lui sont permutables, car étant permutables à G, elles transforment chaque substitution de φ, telle que φ_1, en une substitution contenue dans G et échangeable aux substitutions transformées de celles de G, lesquelles ne sont autres que les G; la transformée de φ_1 fera donc elle-même partie de φ.

Le faisceau φ jouirait donc des mêmes propriétés que F, quoique plus général, contrairement à nos hypothèses.

Supposons donc que $S_2 = T^{-1}S_1T$ ne soit pas échangeable à S_1, la substitution $S_1^{-1}T^{-1}S_1T = M_1$ fera partie de G, mais sans se réduire à la forme F, car elle n'est pas échangeable à S_1, et les F le sont. D'autre part, son déterminant se réduit à l'unité, car soient d et δ les déterminants respectifs de S_1 et de T, le déterminant de M_1 sera égal à $d^{-1}\delta^{-1}d\delta \equiv 1$.

Soient $M_2 = T^{-1}M_1T$, $M_3 = U^{-1}M_1U, \ldots$, les transformées de M_1 par les substitutions $\mathfrak{L}$, leur déterminant sera égal à 1; en outre, d'après ce que nous venons de démontrer, l'une d'elles au moins, telle que M_2, ne sera pas échangeable à M_1, et par suite ne fera pas partie de F.

Il est donc prouvé que G *contient deux substitutions* M_1 *et* M_2 *de déterminant* 1, *lesquelles ne font pas partie de* F, *et ne sont pas échangeables entre elles.*

7. On peut remplacer x et y par d'autres indices z et u, choisis de manière à ramener M_1 à sa forme canonique. Ce changement d'indices n'altérera pas la forme des substitutions F, car chacune d'elles, multipliant x et y par un même facteur constant, multipliera par le même facteur toute fonction linéaire de ces indices.

M_1 *ne peut se réduire à la forme* $\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z + \alpha u \end{vmatrix}$; car s'il en était ainsi, soit $T = \begin{vmatrix} z & az + bu \\ u & b'z + a'u \end{vmatrix}$ une substitution quelconque de G; elle est échangeable, aux F près, à S; on aura donc une relation telle que $ST = TSf$, f désignant la substitution qui multiplie les indices

par un même facteur constant f. Cette égalité donne les relations

$$a\alpha z + b(\beta z + \alpha u) = f\alpha(az + bu)\ldots,$$

d'où

$$\alpha b = f\alpha b, \quad a\alpha + b\beta = f\alpha a,$$

d'où enfin

$$b = 0.$$

les substitutions de G se réduisent donc toutes à la forme

$$\begin{vmatrix} z & az \\ u & b'z + a'u \end{vmatrix},$$

chaque substitution de $\mathcal{L}$ étant permutable à G, transformera M_1 en une substitution de cette forme; et le groupe $\mathcal{L}$ combiné aux substitutions $\begin{vmatrix} z & z+\alpha \\ u & u+\alpha' \end{vmatrix}$ ne donnera pas un groupe primitif (*voir* le troisième cas).

8. Soit donc $M_1 = \begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}$, α et β étant deux entiers différents, réels ou imaginaires conjugués. Le déterminant de M_1 étant égal à l'unité, on aura $\alpha\beta = 1$. La substitution $T = \begin{vmatrix} z & az + bu \\ u & b'z + a'u \end{vmatrix}$ satisfaisant à la relation $M_1 T = TM_1 f'$, on aura les conditions

$$a\alpha z + b\beta u = f\alpha(az + bu),$$
$$b'\alpha z + a'\beta u = f\beta(b'z + a'u),$$

d'où

$$a\alpha = f\alpha a, \quad b\beta = f\alpha b, \quad b'\alpha = fb'\beta, \quad a'\beta = fa'\beta.$$

Si l'on n'a pas à la fois $a = a' = 0$, il viendra $f = 1$, puis $b = b' = 0$. Si au contraire $a = a' = 0$, bb' sera $\gtrless 0$, sans quoi le déterminant de T s'annulerait, et l'on aura

$$\beta = f\alpha, \quad \alpha = f\beta, \quad \text{d'où} \quad f^2 = 1,$$

et comme β diffère de α,

$$f = -1, \quad \beta \equiv -\alpha.$$

Substituant cette valeur dans la relation $\alpha\beta \equiv 1$, il vient

$$\alpha^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Deux cas seront à distinguer ici suivant que p sera de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n+3$.

9. 1° Supposons p de la forme $4n+1$. La congruence

$$a^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

aura deux racines réelles $\pm j$, et M_1 prendra la forme réelle

$$M_1 = \begin{vmatrix} z & jz \\ u & -ju \end{vmatrix}.$$

D'après ce qu'on vient de voir, parmi les substitutions de G, les unes lui seront échangeables et seront de la forme $\begin{vmatrix} z & az \\ u & a'u \end{vmatrix}$, les autres la transformeront en $M_1\theta$ (θ étant la substitution qui multiplie tous les indices par -1), et seront de la forme $\begin{vmatrix} z & bu \\ u & b'z \end{vmatrix}$. En particulier M_2 sera de cette dernière forme; on peut d'ailleurs y supposer $b = j$; car soit $b \equiv jm \pmod{p}$; on pourrait prendre mu pour indice indépendant à la place de u, ce qui n'altérerait pas l'expression des F ni celle des M_1.

Soit donc $b = j$. Le déterminant de M_2 étant égal à l'unité, on aura

$$jb' \equiv -1 \equiv j^2, \quad \text{d'où} \quad b' = j,$$

et enfin

$$M_2 = \begin{vmatrix} z & ju \\ u & jz \end{vmatrix}.$$

Les substitutions de G sont toutes de la forme $M_1^{\rho_1} M_2^{\rho_2} f$, f étant une

des substitutions de F, et chacun des exposants ρ_1, ρ_2 étant égaux à zéro ou à 1.

Soit en effet T une quelconque de ces substitutions; nous venons de voir qu'elle transforme M_1 en M_1 ou en $M_1\theta$; elle devra de même transformer M_2 en M_2 ou $M_2\theta$. Supposons pour fixer les idées que T transforme M_1 et M_2 en $M_1\theta$ et $M_2\theta$, posons

$$T = M_1 M_2 T_1,$$

$T_1 = (M_1 M_2)^{-1} T$ sera échangeable à la fois à M_1 et à M_2; étant échangeable à M_1, elle se réduira à la forme $\begin{vmatrix} z & az \\ u & bu \end{vmatrix}$; pour qu'elle soit échangeable à M_2, il faudra en outre qu'on ait $b = a$; donc T_1 multiplie les indices par un même facteur constant, et par suite fait partie de F.

Soit maintenant U l'une quelconque des substitutions $\mathfrak{L}$; les transformées de M_1 et M_2 par cette substitution appartiennent au faisceau G; soient respectivement $M_1^{\rho'_1} M_2^{\rho'_2} f'$ et $M_1^{\rho''_1} M_2^{\rho''_2} f''$ ces transformées, leurs déterminants doivent se réduire à l'unité; mais ils sont respectivement égaux aux déterminants de f' et de f'', donc chacune des deux substitutions f', f'' doit se réduire à θ ou à $\theta^2 = 1$. En outre, ces deux substitutions sont échangeables entre elles à $\theta^{\rho'_1\rho''_2 - \rho''_1\rho'_2}$ près. Mais elles le sont à θ près, car on a

$$M_1^{-1} M_2^{-1} M_1 M_2 = \theta,$$

d'où

$$\begin{aligned}(U^{-1} M_1 U)^{-1} . (U^{-1} M_2 U)^{-1} . U^{-1} M_1 U . U^{-1} M_2 U \\ = U^{-1} M_1^{-1} M_2^{-1} M_1 M_2 U = U^{-1} \theta U = \theta,\end{aligned}$$

donc

$$\rho'_1\rho''_2 - \rho''_1\rho'_2 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Cela posé, U résultera de la combinaison de F, M_1, M_2 avec la substitution $P = \begin{vmatrix} z & z - ju \\ u & z + ju \end{vmatrix}$, qui transforme M_1 et M_2 en M_2 et $M_1 M_2$, et la substitution $Q = \begin{vmatrix} z & z + u \\ u & z - u \end{vmatrix}$, qui les transforme en M_2 et M_1.

En effet

P	transforme	M_1	en M_2,	et	M_2	en M_1M_2,
P^2	»	M_1	M_1M_2,		M_2	$M_2M_1M_2 = M_2$,
Q	»	M_1	M_2,		M_2	M_1,
QP	»	M_1	M_1M_2,		M_2	M_2,
QP^2	»	M_1	M_1,		M_2	M_1M_2.

On voit par ce tableau que $\rho'_1, \rho'_2, \rho''_1, \rho''_2$ étant égaux à zéro ou à 1, et satisfaisant à la relation $\rho'_1\rho''_2 - \rho'_2\rho''_1 \equiv 1$ (mod. 2), de quelque manière que ces indices soient d'ailleurs choisis, l'une des substitutions 1, P, P^2, Q, QP, QP^2 transformera M_1 et M_2 en $M_1^{\rho'_1}M_2^{\rho'_2}$ et $M_1^{\rho''_1}M_2^{\rho''_2}$. (Si par exemple on pose $\rho'_1 = 1$ et $\rho''_2 = 0$, d'où $\rho'_2 = 1$ et $\rho''_2 = 1$, la substitution P^2 produira la transformation voulue : de même pour les autres systèmes de solutions.) Soit $V = Q^\sigma P^\tau$ cette substitution; $V^{-1}U$ transformera M_1 et M_2 en $M_1 f'$ et $M_2 f''$. Soit $f' = \theta^{\mu_2}$, $f'' = \theta^{\mu_1}$, μ_1 et μ_2 étant égaux à 0 ou à 1; la substitution $\left(M_1^{\mu_1}M_2^{\mu_2}\right)^{-1}V^{-1}U = f$ sera échangeable à M_1 et M_2, et par suite se réduira à la forme F; on aura donc

$$U = VM_1^{\mu_1}M_2^{\mu_2}f.$$

Donc toutes les substitutions du groupe cherché $\mathfrak{L}$ appartiennent comme nous l'avons annoncé au groupe (F, M_1, M_2, P, Q). Mais réciproquement $\mathfrak{L}$ contient toutes les substitutions de ce groupe, car nous allons prouver qu'il est résoluble. En effet, les F sont échangeables entre eux, M_1 leur est échangeable, M_2 est permutable au faisceau (F, M_1), P l'est au faisceau (F, M_1, M_2), enfin Q l'est à (F, M_1, M_2, P), car elle l'est au faisceau partiel (F, M_1, M_2), et d'autre part la substitution $Q^{-1}PQ$, transformant M_1 et M_2 en $M_2M_1 = M_1M_2\theta$ et M_1, est égale à P^2M_1f, $f = (P^2M_1)^{-1}Q^{-1}PQ$ étant échangeable à la fois à M_1 et à M_2, et appartenant par suite au faisceau F; donc $Q^{-1}PQ$ appartient au faisceau (F, M_1, M_2, P).

L'expression générale des substitutions $\mathfrak{L}$ est, comme on l'a vu,

$Q^\lambda P^\nu M_1^{\mu_1} M_2^{\mu_2} f$, λ, μ_1, μ_2 étant égaux à 0 ou à 1, et ν à 0, 1 ou 2, enfin f étant l'une des $p-1$ substitutions de F. Deux substitutions correspondant à des valeurs différentes de λ, ν, μ_1, μ_2, f sont d'ailleurs évidemment distinctes. L'ordre de $\mathfrak{L}$ est donc égal à $24(p-1)$.

En combinant ce groupe avec les substitutions $\begin{vmatrix} z & z+\alpha \\ u & u+\alpha' \end{vmatrix}$, on obtient le troisième et dernier type de groupes résolubles dont l'ordre sera $24(p-1)p^2$.

10. 2° Supposons maintenant p de la forme $4n+3$. La congruence $\alpha^2 \equiv -1 \pmod{p}$ a deux racines imaginaires, $\alpha = j$ et $\beta \equiv -j \equiv j^p$. M_1 prend la forme canonique $\begin{vmatrix} z & jz \\ u & j^p u \end{vmatrix}$, z et u étant deux indices imaginaires conjugués. On voit, comme dans l'hypothèse précédente, que M_2 est de la forme $\begin{vmatrix} z & bu \\ u & b'z \end{vmatrix}$. D'ailleurs M_2, remplaçant z par bu, remplacera u par la fonction conjuguée $b^p z$; donc $b' \equiv b^p$. En outre, son déterminant étant égal à 1, on aura

$$b^{p+1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Cette dernière congruence a $p+1$ racines, respectivement égales à $\tau^{\frac{p-1}{2}}, \tau^{3\frac{p-1}{2}}, \ldots, \tau^{(2p+1)\frac{p-1}{2}}$, τ étant une racine primitive de la congruence $\tau^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Soit $r = s + tj$ l'une de ces racines, choisie à volonté : on peut supposer $b = r$; car admettons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit

$$b = \tau^{\frac{p-1}{2}(2n+1)}, \quad r = \tau^{\frac{p-1}{2}(2n'+1)},$$

d'où

$$b = r\,\tau^{(p-1)(n-n')}.$$

Prenons pour indices indépendants, à la place de z et de u, les indices $\tau^{n-n'}z = z'$ et $\tau^{(n-n')p}u = u'$, lesquels sont également conjugués.

Ce changement d'indices, qui n'altère pas la forme des substitutions F, M_1, donnera à M_2 la forme voulue $\begin{vmatrix} z' & ru' \\ u' & r^p z' \end{vmatrix}$.

On voit maintenant, comme dans l'hypothèse précédente : 1° que les substitutions de G sont toutes de la forme $M_1^{\rho_1} M_2^{\rho_2} f$; 2° que si l'on peut déterminer deux substitutions P et Q qui transforment respectivement M_1, M_2 en M_2, $M_1 M_2$ et en M_2, M_1, $\mathfrak{L}$ sera formé des substitutions (F, M_1, M_2, P, Q) en nombre $24(p-1)$.

Or les substitutions P et Q existent en effet, et s'obtiennent aisément par la méthode des coefficients indéterminés. Mais auparavant il convient de ramener à la forme réelle les substitutions M_1 et M_2.

Soit $z = X + jY$, $u = X + j^p Y = X - jY$: M_1, remplaçant $X + jY$ par $j(X - jY)$, sera égale à $\begin{vmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{vmatrix}$.

Quant à M_2, elle remplace $X + jY$ par $(s + tj)(X - iY)$. Rapportée aux indices X, Y, elle prendra donc la forme $\begin{vmatrix} X & sX + tY \\ Y & tX - sY \end{vmatrix}$, s et t étant deux entiers qui peuvent être choisis arbitrairement, pourvu qu'ils satisfassent à la condition $(s + tj)^{p+1} \equiv -1 \pmod{p}$, laquelle peut s'écrire ainsi :

$$(s + tj)(s + tj^p) \equiv s^2 + t^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

On trouvera ensuite

$$P = \begin{vmatrix} X & -(1+st)X + (s-t^2)Y \\ Y & (t+s^2)X + (st - s + t)Y \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{vmatrix} X & sX + (t+1)Y \\ Y & (t-1)X - sY \end{vmatrix}.$$

En combinant le groupe que nous venons de construire avec les substitutions $\begin{vmatrix} X & X + \alpha \\ Y & Y + \alpha' \end{vmatrix}$, on aura le troisième type de groupes résolubles sous la forme indiquée pour le cas où p est de la forme $4n + 3$.

II.

11. Il est démontré par ce qui précède que tout groupe résoluble général et primitif de degré p^2 appartient à l'un des trois types énoncés. Il nous reste à prouver réciproquement : 1° que les groupes résolubles fournis comme nous l'avons indiqué sont primitifs; 2° que, sauf les exceptions signalées plus haut, ils sont généraux et distincts.

Pour établir la première proposition, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Soit* L *un groupe de substitutions de la forme linéaire* $\begin{vmatrix} x & ax+by \\ y & b'x+a'y \end{vmatrix}$. *Si ses substitutions, jointes aux suivantes* $E = \begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}$, *ne forment pas un groupe primitif, il existera une fonction des indices que toute substitution de* L *multipliera par un facteur constant.*

Supposons, en effet, que le groupe (L, E) ne soit pas primitif, les racines que ce groupe permute se partagent en systèmes tels, que chacune des substitutions (L, E) remplace les racines de chaque système par celles d'un même système. Soit Σ l'un de ces systèmes, ρ l'une des racines qu'il contient; les substitutions E permutent transitivement les racines : l'une d'elles au moins, S, remplacera donc ρ par une autre racine du même système, et par suite ne déplacera pas ce système.

La substitution S ne déplacera aucun système; car, soit Σ' un autre système quelconque, parmi les substitutions E il en existe une, S', qui remplace ρ par une racine ρ' du système Σ', et qui, par suite, remplace les racines de Σ par celles de Σ'; S remplaçant les racines de Σ les unes par les autres, $S'^{-1}SS'$ remplacera les racines de Σ' les unes par les autres; mais S' et S sont échangeables, donc $S'^{-1}SS' = S$ ne déplace pas le système Σ'.

Soit $S = \begin{vmatrix} x & x+\alpha_0 \\ y & y+\alpha'_0 \end{vmatrix}$. Ses puissances $\begin{vmatrix} x & x+m\alpha_0 \\ y & y+m\alpha'_0 \end{vmatrix}$ ne dé-

placent évidemment pas les systèmes, et toute autre substitution de E les déplace; car soit $T = \begin{vmatrix} x & x+\alpha_1 \\ y & y+\alpha'_1 \end{vmatrix}$ une substitution telle, qu'on n'ait pas à la fois $\alpha_1 \equiv m\alpha_0$ et $\alpha'_1 \equiv m\alpha'_0$: le déterminant $\alpha_0\alpha'_1 - \alpha'_0\alpha_1$ sera $\gtrless 0$ (mod. p); on pourra donc, quels que soient α et α', satisfaire à la fois aux deux congruences

$$m\alpha_0 + n\alpha_1 \equiv \alpha, \quad m\alpha'_0 + n\alpha'_1 \equiv \alpha'.$$

Donc les substitutions de la forme $S^m T^n = \begin{vmatrix} x & x + m\alpha_0 + n\alpha_1 \\ y & y + m\alpha'_0 + n\alpha'_1 \end{vmatrix}$ reproduisent toutes celles du groupe E.

Cela posé, s'il y avait un système que T ne déplaçât pas, T n'en déplacerait aucun d'après ce que nous venons de voir; les substitutions $S^m T^n$ ou E ne déplaceraient pas ces systèmes, ce qui est absurde, car elles permutent transitivement toutes les racines.

On peut maintenant déterminer deux fonctions des racines

$$X = cx + dy \quad \text{et} \quad Y = d'x + c'y$$

telles, que S accroisse X d'une unité sans altérer Y, et que T accroisse Y d'une unité sans altérer X. En effet il suffira pour cela que c, d, d'une part, et d', c', d'autre part, satisfassent aux congruences suivantes :

$$\left.\begin{matrix} c\alpha_0 + d\alpha'_0 \equiv 1 \\ c\alpha_1 + d\alpha'_1 \equiv 0 \end{matrix}\right\} (\text{mod. } p), \qquad \left.\begin{matrix} d'\alpha_0 + c'\alpha'_0 \equiv 0 \\ d'\alpha_1 + c'\alpha'_1 \equiv 1 \end{matrix}\right\} (\text{mod. } p),$$

lesquelles comportent toujours un système de solutions, le déterminant $\alpha_0\alpha'_1 - \alpha'_0\alpha_1$ étant $\gtrless 0$ (mod. p).

Prenons X, Y pour indices indépendants à la place de x, y, les substitutions de L prendront la forme $\begin{vmatrix} X & a_1 X + b_1 Y \\ Y & b'_1 X + a'_1 Y \end{vmatrix}$. Or une substitution de cette forme transforme $S = \begin{vmatrix} X & X+1 \\ Y & Y \end{vmatrix}$ et $T = \begin{vmatrix} X & X \\ Y & Y+1 \end{vmatrix}$ en $S^{a_1} T^{b'_1}$ et $S^{b_1} T^{a'_1}$; d'autre part, les substitutions L remplaçant les

lettres de chaque système par celles d'un même système, et S ne déplaçant pas les systèmes, il est clair que ses transformées par les L ne les déplaceront pas; elles se réduiront donc à des puissances de S. Le coefficient b'_1 sera donc toujours nul, et chacune des substitutions de L multipliera Y par un facteur constant.

12. Or il est aisé de voir que parmi les trois types de groupes $\mathfrak{L}$ déterminés plus haut, il n'en existe aucun qui jouisse de la propriété signalée au lemme précédent.

Car considérons le premier type, par exemple. Son premier faisceau F est formé des substitutions $\begin{vmatrix} x & ax \\ y & by \end{vmatrix}$, et les seules fonctions des indices qu'elles multiplient par un facteur constant sont évidemment x et ses multiples, ou y et ses multiples; aucune de ces dernières n'est multipliée par un facteur constant dans la substitution $\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}$.

Considérons maintenant le second type. Son premier faisceau contient une substitution qui ne peut être ramenée à la forme canonique que par l'introduction d'imaginaires; il n'existe donc aucune fonction réelle des indices que cette substitution multiplie par un facteur constant.

Les mêmes raisonnements s'appliquent au troisième type.

Il est donc prouvé que les trois types de groupes que nous avons obtenus sont primitifs; il reste à s'assurer s'ils sont généraux et distincts.

13. Théorème I. — *Tout groupe* H *du premier type est général si* $p > 5$.

En effet, si H n'était pas général, il serait contenu dans un autre groupe plus général, H_1, lequel serait réductible au second ou au troisième type. Il ne peut se réduire au second type, car son ordre serait égal à $2(p^2-1)p^2$; d'ailleurs il devrait être un multiple de celui de H, lequel est égal à $2(p-1)^2p^2$. Donc p^2-1 serait un multiple de $(p-1)^2$ ou $p+1$ un multiple de $p-1$, ce qui n'a pas lieu si $p > 3$.

D'autre part, H_1 ne peut se ramener au troisième type. En effet,

soit l une racine primitive du nombre p : H contient la substitution $\begin{vmatrix} x & lx \\ y & y \end{vmatrix}$, laquelle est d'ordre $p-1$, et laisse immobiles p racines, à savoir celles pour lesquelles $x=0$. Or le groupe H_1 du troisième type, dans lequel H devrait être contenu, ne renferme aucune semblable substitution. En effet, soit $\mathcal{L} = (F, M_1, M_2, P, Q)$ le groupe de substitutions linéaires qui, combinées aux substitutions $\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}$, reproduisent H_1 : l'une quelconque de ses substitutions, S, transforme, comme nous l'avons vu, M_1 et M_2 en substitutions de la forme $M_1^{\rho'_1} M_2^{\rho'_2} \theta^{\mu'}$, $M_1^{\rho''_1} M_2^{\rho''_2} \theta^{\mu''}$, $\rho'_1, \rho'_2, \mu', \rho''_1, \rho''_2, \mu''$ étant égaux à 0 ou à 1 et satisfaisant à la relation $\rho'_1 \rho''_2 - \rho''_1 \rho'_2 \equiv 1 \pmod{2}$, enfin θ étant la substitution qui multiplie les deux indices par -1. Il est aisé de voir que, de quelque manière que $\rho'_1, \rho'_2, \mu', \rho''_1, \rho''_2, \mu''$ soient choisis, l'une des quatre premières puissances de S sera échangeable à M_1 et à M_2. Car si, par exemple, S transforme M_1 et M_2 en $M_2\theta$ et $M_1 M_2$, S^2 les transformera en $M_1 M_2 \theta$ et en $M_2 \theta M_1 M_2 = M_1 M_2 M_2 = M_1 \theta$, et S^3 les transformera en $M_2 \theta M_1 M_2 \theta = M_1$ et en $M_2 \theta \theta = M_2$. Donc, r étant un entier au plus égal à 4, S^r sera échangeable à M_1 et à M_2, et par suite se réduira à la forme $\begin{vmatrix} x & ax \\ y & ay \end{vmatrix}$.

Cela posé, soit T la substitution d'ordre $p-1$ et laissant p racines immobiles que H_1 devrait contenir; elle est évidemment le produit d'une substitution linéaire S par une substitution E_1 appartenant à la forme générale E. Soit donc $T = SE_1$: on aura évidemment $T^r = S^r E_2$, E_2 étant encore une substitution de la forme E. Soit donc

$$T^r = \begin{vmatrix} x & ax+\alpha \\ y & ay+\alpha' \end{vmatrix} :$$

cette substitution doit laisser d'ailleurs immobiles les p racines que T laissait immobiles; donc a se réduit à 1, et α, α' à zéro, car s'il en était autrement, les congruences $x \equiv ax+\alpha$ et $y \equiv ay+\alpha'$ ne comportant tout au plus qu'un système de solutions, T^r ne laisserait qu'une racine immobile.

Donc T^r se réduit à 1, et T est tout au plus d'ordre 4, nombre inférieur à $p-1$.

14. Théorème II. — *Les groupes du premier type ne sont pas généraux si $p=3$ ou 5.*

En effet, si $p=3$, la substitution $\begin{vmatrix} x & x+y \\ y & x-y \end{vmatrix}$ est permutable au groupe proposé H, et peut lui être adjointe de manière à former un groupe plus général.

Si $p=5$, H est dérivé des substitutions

$$E=\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix},\quad A=\begin{vmatrix} x & 2x \\ y & 2y \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} x & 2y \\ y & y \end{vmatrix}\quad \text{et}\quad C=\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix},$$

et l'on vérifie aisément que les substitutions

$$E,\ A,\ D=\begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix},\quad C,\ G=\begin{vmatrix} x & x+y \\ y & 2y-2x \end{vmatrix},\quad B,$$

forment l'échelle d'un nouveau groupe résoluble, qui sera évidemment plus général que H.

15. Théorème III. — *Tout groupe* H *du deuxième type est général si $p>3$.*

En effet, s'il n'était pas général, il serait contenu dans un autre groupe plus général H_1, lequel serait réductible au premier ou au troisième type. Il ne peut se réduire au premier type, car son ordre $2(p-1)^2p^2$ devrait être un multiple de celui de H, $2(p^2-1)p^2$, ce qui est absurde. D'autre part, il ne peut se réduire au troisième type, car nous venons de voir que T étant une substitution quelconque d'un groupe du troisième type, et r un entier au plus égal à 4, T^r se réduit à la forme $\begin{vmatrix} x & ax+\alpha \\ y & ay+\alpha' \end{vmatrix}$, substitution dont la puissance $p-1$ se réduit évidemment à la forme $\begin{vmatrix} x & x+\beta \\ y & y+\beta' \end{vmatrix}$, et dont la puissance $(p-1)p$ se réduit à l'unité. Si donc H était contenu dans un groupe

du troisième type, chacune de ces substitutions élevée à la puissance $r(p-1)p$ se réduirait à l'unité (r désignant un des quatre nombres 1, 2, 3, 4).

Or, soit $\mathcal{L}$ le groupe des substitutions linéaires qui concourent avec les E à la formation de H : ce groupe, étant rapporté aux indices imaginaires z et u, contient la substitution $\begin{vmatrix} z & mz \\ u & m^p u \end{vmatrix}$, où m est une racine primitive de la congruence $m^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p}$. L'ordre de cette substitution est égal à p^2-1, celles de ses puissances qui se réduisent à l'unité sont donc celles dont le degré est un multiple de p^2-1; donc p^2-1 devrait diviser $r(p-1)p$, et comme il est premier à p, il diviserait $r(p-1)$; donc $p+1$ diviserait r, ce qui est absurde si $p>3$.

16. Théorème IV. — *Le groupe du deuxième type n'est pas général si $p=3$.*

En effet, ses substitutions dérivent des suivantes :

$$E = \begin{vmatrix} z & z+\beta \\ u & u+\beta^p \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} z & mz \\ u & m^p u \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad G = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix},$$

m étant une racine primitive de la congruence

$$m^{3^2-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Or on vérifie aisément que les substitutions

$$E, \quad f^2, \quad Gf, \quad U = \begin{vmatrix} z & mz+u \\ u & z+m^p u \end{vmatrix}, \quad f$$

forment l'échelle d'un groupe résoluble plus général que le proposé.

17. Théorème V. — *Tout groupe* H *du troisième type est général.*

En effet, s'il était contenu dans un autre groupe H_1 réductible au premier ou au second type, les propriétés générales des substitutions de H_1 s'appliqueraient en particulier à celles de H. Or nous allons voir qu'il n'en est pas ainsi.

Supposons H_1 appartenant au premier type. Ses substitutions sont toutes de l'une des formes

$$\begin{vmatrix} x & ax+\alpha \\ y & by+\alpha' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x & ay+\alpha \\ y & bx+\alpha' \end{vmatrix},$$

et il est clair que le carré de l'une quelconque d'entre elles appartiendra à la première de ces deux formes.

Soient donc S et T deux substitutions quelconques de H_1,

$$S^2 = \begin{vmatrix} x & ax+\alpha \\ y & by+\alpha' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad T^2 = \begin{vmatrix} x & a_1x+\alpha_1 \\ y & b_1y+\alpha'_1 \end{vmatrix}$$

leurs carrés : il est clair que la substitution $S^{-2}T^{-2}S^2T^2$ se réduit à la forme $\begin{vmatrix} x & x+\beta \\ y & y+\beta' \end{vmatrix}$, et que son ordre sera égal à p, si l'on n'a pas $\beta=\beta'=0$, et qu'il se réduit à 1 dans le cas contraire.

Si H_1 appartient au second type, ses substitutions jouiront de la même propriété, car en rapportant ce groupe aux indices imaginaires conjugués z et u, les substitutions $\begin{vmatrix} x & x+\alpha \\ y & y+\alpha' \end{vmatrix}$ prendront la forme $\begin{vmatrix} z & z+\gamma \\ u & u+\gamma^p \end{vmatrix}$, γ et γ^p étant des constantes imaginaires conjuguées, et les substitutions de H_1 seront de l'une des deux formes

$$\begin{vmatrix} z & mz+\gamma \\ u & m^pu+\gamma^p \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} z & nu+\gamma \\ u & n^pz+\gamma^p \end{vmatrix}.$$

Leurs carrés S^2, T^2,... seront tous de la première forme, et les substitutions telles que $S^{-2}T^{-2}S^2T^2$ seront de la forme $\begin{vmatrix} z & z+\gamma \\ u & u+\gamma^p \end{vmatrix}$; leur ordre sera donc égal à p ou à 1.

Or H contient les deux substitutions P et PM_1, qui étant prises pour

S et T, ne jouissent pas de la propriété ci-dessus assignée. On a en effet

$$\begin{aligned}
P^{-2}(PM_1)^{-2}P^2(PM_1)^2 &= P^{-2}.M_1^{-1}P_1^{-1}M_1^{-1}P^{-1}.P^2.PM_1PM_1 \\
&= P^{-2}M_1^{-1}P^2.P^{-3}M_1^{-1}P^3.P^{-1}M_1P.M_1 \\
&= (M_1M_2)^{-1}(M_2M_1M_2)^{-1}M_2M_1 \\
&= M_2^{-1}M_1^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1}M_2^{-1}M_2M_1 = M_1^{-1}6,
\end{aligned}$$

substitution dont l'ordre est égal à 4.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE;

PAR M. ANATOLE **DE CALIGNY**.

« Versailles, 20 février 1868.

» Vous avez bien voulu insérer dans le cahier de janvier un article intitulé : *Principes d'une nouvelle turbine, etc.* A l'époque où j'écrivais cet article je n'avais pas sous la main, mais depuis j'ai retrouvé des Lettres que M. le Général Poncelet m'avait fait l'honneur de m'écrire relativement à mes recherches sur les roues hydrauliques. Peut-être est-il convenable, surtout après ce que j'ai publié sur ce sujet dans le tome précédent de ce journal, d'en présenter ici quelques extraits textuels. Voici d'abord la copie du passage de sa Lettre du 14 décembre 1863, mentionné dans le Mémoire que je rappelle :

« A l'égard de la question que vous voulez bien, Monsieur, me » poser concernant les lames oscillantes par ascension le long des » aubes courbes verticales d'une roue horizontale, je ne sache pas que » personne en ait encore fait la proposition formelle. »

» On sait que je m'occupe depuis longtemps de l'histoire de l'hydraulique. M. Poncelet m'écrivit à ce sujet, le 2 juillet 1862, une Lettre dont l'extrait suivant suffira pour rappeler l'importance qu'il attachait à mes recherches :

« J'ai l'honneur de vous retourner, selon vos désirs, la Note que » vous m'avez adressée, et qui est relative aux turbines plus ou moins » analogues à celle que j'ai moi-même imaginée en 1823, et dont j'ai » donné la théorie dans mes Leçons de 1826 à l'École de Metz. Je ne » vois absolument aucun inconvénient à ce que vous publiiez vos » opinions et jugements à cet égard, et je demeure d'avis, comme à » l'époque de nos dernières entrevues, que vous rédigiez sur l'en» semble des remarques historiques que vous avez faites sur l'hydrau» lique en général *un livre qui, je n'en doute pas, sera favorablement* » *accueilli du public et de l'Académie, sans en excepter même les* » *derniers inventeurs plus ou moins autorisés à prendre un aussi glo*» *rieux titre.* »

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT VIBRATOIRE

D'UNE MEMBRANE DE FORME ELLIPTIQUE;

PAR M. ÉMILE MATHIEU [*].

Imaginons une membrane tendue également dans tous les sens, et dont le contour, fixé invariablement, est une ellipse. Notre but, dans ce Mémoire, est de déterminer par l'analyse toutes les circonstances de son mouvement vibratoire; nous y calculons la forme et la position des lignes nodales et le son correspondant. Mais ces mouvements sont assujettis à certaines lois générales qui peuvent être définies sans le secours de l'analyse.

Lorsqu'on met la membrane elliptique en vibration, il se produit deux systèmes de lignes nodales qui sont, les unes des ellipses, les autres des hyperboles, et toutes ces courbes du second ordre ont les mêmes foyers que l'ellipse du contour.

Tous ces mouvements vibratoires peuvent être partagés en deux genres. Dans l'un de ces genres, le grand axe reste fixe et forme une ligne nodale, et si l'on considère deux points symétriques par rapport au grand axe, leurs mouvements sont égaux et de sens contraire. Dans l'autre genre, au contraire, les extrémités du grand axe situées entre les foyers et les sommets forment des ventres de vibration, tandis que la partie située entre les deux foyers offre un minimum de vibration,

---

[*] Ce Mémoire a été exposé au mois de janvier 1868 dans un cours à la Sorbonne.

de sorte que si l'on prend un point M sur la droite des foyers, et un point très-voisin sur une perpendiculaire en M, l'amplitude de la vibration est moindre pour le premier que pour le second point; si l'on considère deux points quelconques de la membrane, symétriques par rapport au grand axe, leurs mouvements sont égaux et de même sens.

Définissons *ligne hyperbolique* les deux branches d'une hyperbole terminées au grand axe qui possèdent la même asymptote, de manière qu'une hyperbole est comptée pour deux lignes hyperboliques; mais si l'un des axes de la membrane est immobile, il sera compté pour une seule ligne nodale hyperbolique. Alors les mouvements des deux genres peuvent être groupés deux à deux d'un manière fort remarquable. En effet, à un nombre a de lignes nodales elliptiques et à un nombre b de lignes nodales hyperboliques correspond un état vibratoire de chaque genre. Or, quoique ces états vibratoires diffèrent à la fois par les deux systèmes de lignes nodales et par le son résultant, ils se confondent cependant dans la membrane circulaire pour donner, comme lignes de nœuds, a cercles concentriques et b diamètres, qui les divisent en parties égales. On comprend, d'après cela, que si l'excentricité est très-petite, les sons de ces deux états vibratoires différeront très-peu.

Il faut mettre à part le cas où il ne se produit pas de lignes nodales hyperboliques; car le mouvement ne peut alors être que du second genre, et il n'y a qu'un état vibratoire qui produise a ellipses nodales.

Le mouvement vibratoire d'une membrane renfermée entre deux ellipses homofocales, dont tous les points sont parfaitement fixés, est aussi soumis à des lois fort simples.

Les lignes nodales de cette membrane sont encore des ellipses et des portions de branches d'hyperbole qui ont les mêmes foyers que les deux ellipses des contours. Et il y a encore deux genres de mouvements vibratoires : dans l'un, les portions du grand axe renfermées entre les deux contours sont des nœuds; dans l'autre, des ventres de vibration. Mais lorsqu'on étudie les états vibratoires des deux genres qui donnent pour nœuds a ellipses et b lignes hyperboliques, on trouve, si le nombre b est assez grand et si l'excentricité n'est pas très-grande, que le son est à très-peu près le même, ainsi que la disposition

des ellipses nodales. Or, les deux sons différant excessivement peu, on sait que dans l'expérience on produira ensemble les deux états vibratoires, et, dans le mouvement résultant, la disposition des b lignes nodales hyperboliques peut varier d'une infinité de manières.

M. Bourget a donné la théorie de la membrane circulaire (*Annales de l'École Normale*, t. III) et a fait les expériences propres à la vérifier; il a trouvé des sons un peu plus élevés que ne l'indique le calcul.

---

1. Considérons une membrane plane, homogène, également tendue dans tous les sens, et dont le contour est fixé invariablement. Traçons dans le plan de cette membrane deux axes de coordonnées rectangulaires quelconques, Ox et Oy, et menons un axe des z perpendiculaire à ce plan. Si nous communiquons un mouvement vibratoire a cette membrane, un point de sa surface dont les coordonnées sont x, y et $z = 0$ éprouvera un déplacement normal w régi par l'équation

$$(a) \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} = m^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right),$$

où m^2 désigne le rapport de la tension à la densité de la membrane [*]. Et l'on a à intégrer cette équation, en s'imposant la condition que w soit nul sur le contour.

Nous devons supposer dans ce Mémoire que ce contour est une ellipse. Mais nous allons d'abord le prendre circulaire et présenter très-succinctement la solution de ce cas particulier, qui nous sera ensuite quelquefois utile comme moyen de comparaison.

Membrane circulaire.

2. Plaçons l'origine des coordonnées au centre du cercle et passons des coordonnées rectilignes x et y aux coordonnées polaires r et α par

---

[*] *Théorie de l'Élasticité* de M. Lamé, IXe Leçon

les formules

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha,$$

en prenant arbitrairement la direction de l'axe polaire.

L'équation (a) devient

$$\frac{d^2w}{dt^2} = m^2\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{d\alpha^2}\right),$$

et si l'on pose $w = u\sin 2\lambda mt$, on a

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -4\lambda^2 u.$$

Posons $u = PQ$, en désignant par P une fonction de α et par Q une fonction de r, et nous aurons une équation qui peut s'écrire

$$\frac{r^2}{Q}\frac{d^2Q}{dr^2} + \frac{r}{Q}\frac{dQ}{dr} + 4\lambda^2 r^2 = -\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\alpha^2};$$

comme le premier membre ne dépend que de r et le second que de α, ils sont égaux à une même constante n^2, et l'on a

$$(1) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + n^2P = 0,$$

$$(2) \qquad r^2\frac{d^2Q}{dr^2} + r\frac{dQ}{dr} - (n^2 - 4\lambda^2 r^2)Q = 0.$$

Nous avons pris pour la constante une quantité positive, afin d'obtenir pour P la fonction périodique

$$P = A\cos n\alpha + B\sin n\alpha,$$

et, afin que P ne change pas quand on y remplacera α par $\alpha + 2\pi$, il faut que n soit un nombre entier.

Si l'on intègre l'équation (2) par séries, on obtient les deux solu-

tions particulières :

$$(3)\quad \begin{cases} Q = Cr^n \Big[1 - \dfrac{(\lambda r)^2}{1\,(n+1)} + \dfrac{(\lambda r)^4}{1.2\,(n+1)\,(n+2)} \\ \qquad - \dfrac{(\lambda r)^6}{1.2.3\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} + \ldots \Big], \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} Q' = C'r^{-n} \Big[1 + \dfrac{(\lambda r)^2}{1\,(n-1)} + \dfrac{(\lambda r)^4}{1.2\,(n-1)\,(n-2)} \\ \qquad + \dfrac{(\lambda r)^6}{1.2.3\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)} + \ldots \Big], \end{cases}$$

dont la seconde se déduit de la première par le changement de n en $-n$. Si on fait leur somme, on obtient la solution générale; mais comme évidemment le mouvement vibratoire doit rester fini au centre du cercle, et que Q' devient infini pour $r = 0$, on doit se borner à prendre pour Q la première solution particulière, que l'on portera dans

$$(5)\qquad u = PQ, \quad w = u \sin 2\lambda m t.$$

Enfin, pour que w soit une solution possible, il faut que Q soit nul le long du cercle de contour $r = h$, et λ est déterminé par l'équation

$$1 - \frac{(\lambda h)^2}{1\,(n+1)} + \frac{(\lambda h)^4}{1.2\,(n+1)\,(n+2)} - \ldots = 0.$$

Posons cette équation

$$(6)\quad 1 - \frac{\tau^2}{1\,(n+1)} + \frac{\tau^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{\tau^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots = 0;$$

elle a une infinité de racines $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$, que nous supposerons rangées par ordre de grandeur croissante, et λ peut obtenir l'une quelconque des valeurs

$$\lambda_1 = \frac{\tau_1}{h}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau_2}{h}, \quad \lambda_3 = \frac{\tau_3}{h}, \ldots.$$

Ainsi la formule (5) représente une infinité de mouvements vibratoires possibles qui dépendent de n et de λ; n est susceptible de toutes les valeurs entières, et à chaque valeur de n correspondent une infinité de valeurs de λ.

5. Considérons l'un de ces états vibratoires et voyons quelles sont les lignes nodales. Le mouvement vibratoire satisfait à l'équation

$$(b)\qquad w = (A\cos n\alpha + B\sin n\alpha)\,Q\sin 2\lambda mt;$$

n et λ sont connus, et la hauteur du son, ou le nombre des vibrations qui s'effectuent dans l'unité de temps, est $N = \frac{\lambda m}{\pi}$. Pour obtenir les lignes de nœuds, on fera $w = 0$, à quoi on peut satisfaire, quel que soit t, en posant

$$(7)\qquad A\cos n\alpha + B\sin n\alpha = 0,$$

ou en posant

$$(8)\qquad Q = 0.$$

De l'équation (7) on tire $\tang n\alpha = -\frac{A}{B}$; donc si l'on désigne par $n\alpha_1$ le plus petit des arcs dont la tangente est $-\frac{A}{B}$, et par k un nombre entier quelconque, w est nul pour

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{k\pi}{n},$$

et par conséquent on a pour lignes nodales n diamètres qui divisent la circonférence du cercle en parties égales.

Passant à l'équation (8), nous remarquons d'abord que Q est nul au centre de la membrane, à moins que n ne soit nul à cause du facteur r^n, et ensuite il est nul pour différentes valeurs de r qui sont

$$r = \frac{\tau_1}{\lambda},\quad \frac{\tau_2}{\lambda},\quad \frac{\tau_3}{\lambda},\ldots;$$

ce sont les rayons des cercles nodaux qui ont même centre que la membrane.

Le nombre de ces valeurs de r pour lesquelles Q s'annule est infini; mais on doit rejeter toutes celles qui sont plus grandes que le rayon de la membrane. Quand dans la formule (b) on s'est donné la valeur

de n, λ est susceptible d'une infinité de valeurs $\frac{\tau_1}{h}$, $\frac{\tau_2}{h}, \cdots$; supposons que celle que nous avons adoptée soit la $s^{ième}$,

$$\lambda_s = \frac{\tau_s}{h};$$

alors les cercles nodaux au nombre de $s - 1$ auront pour rayons

$$\frac{\tau_1}{\lambda_s}, \quad \frac{\tau_2}{\lambda_s}, \ldots, \quad \frac{\tau_{s-1}}{\lambda_s}.$$

On voit, par ce qui précède, que, dans l'examen de ces mouvements vibratoires, il n'y a d'autres difficultés de calcul que la recherche des racines de l'équation (b), dans laquelle varie le nombre entier n. M. Bourget a donné, dans son Mémoire, une méthode pour calculer aisément les racines de cette équation, et il a donné les valeurs numériques de ces premières racines pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Les mouvements vibratoires représentés par la formule (b) sont appelés mouvements *simples*, et ce sont ceux que l'on constate par l'expérience. Enfin tout mouvement vibratoire que l'on peut imaginer est la superposition d'un nombre fini ou infini de ces mouvements simples.

Passage des coordonnées rectilignes à des coordonnées de l'ellipse.

4. Désignons par A le demi-grand axe de la membrane elliptique, et par c la demi-distance des foyers; prenons pour axes des x et des y les axes de symétrie de l'ellipse; puis adoptons un second système de coordonnées déterminé par les ellipses et les hyperboles qui ont les mêmes foyers que le contour de la membrane.

L'une quelconque de ces ellipses est donnée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

dans laquelle ρ est $> c$, et si l'on pose

$$\rho = c\,\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}, \quad \rho' = \sqrt{\rho^2 - c^2} = c\,\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2},$$

ρ et ρ' sont le demi-grand axe et le demi-petit axe de cette ellipse, et β ce que M. Lamé appelle le *paramètre thermométrique* (*Sur les Fonctions inverses des transcendantes*, Ire Leçon).

L'une quelconque des hyperboles homofocales a pour équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

où ν est $< c$, et si l'on pose

$$\nu = c \cos\alpha, \quad \nu' = \sqrt{c^2 - \nu^2} = c \sin\alpha :$$

ν et ν' sont les demi-axes de cette hyperbole, et α son paramètre thermométrique.

On passe des coordonnées x et y aux coordonnées ν et ρ ou α et β au moyen des formules

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\rho\nu}{c} = c\,\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha, \\ y &= \frac{\rho'\nu'}{c} = c\,\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha, \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit des équations (1) et (2). Si l'on voulait avoir des formules qui pussent s'appliquer immédiatement au cercle, on adopterait

$$(4) \qquad x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho' \sin\alpha.$$

Soit M un point qui provient de l'intersection de l'ellipse $\beta = \beta_1$ et de l'hyperbole $\nu = \nu_1$. Prolongeons l'ordonnée du point M jusqu'à sa rencontre en N avec le cercle décrit sur le grand axe. On voit d'après les équations (4) que l'angle α est égal à l'angle que fait le rayon mené du centre au point N avec l'axe des x, et comme cet angle a pour cosinus $\frac{\nu}{c}$, il est aussi celui que fait avec l'axe des x l'asymptote à la branche d'hyperbole qui contient le point M, et le rayon mené du centre au point N est cette asymptote.

Il résulte encore des formules (4), que l'on obtiendra tous les points du plan en supposant ρ et ρ' positifs, et faisant varier ρ' de 0 à ∞, et α de 0 à 2π.

Quand on fait varier ainsi les coordonnées, l'équation $\beta =$ const. représente une ellipse entière, mais $\alpha =$ const. ne représente plus que l'une des quatre branches de l'hyperbole terminée à l'axe transverse, et l'hyperbole entière est donnée par les quatre équations

$$\alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \pi - \alpha_1, \quad \alpha = \pi + \alpha_1, \quad \alpha = 2\pi - \alpha_1,$$

qui sont celles des quatre branches. Nous supposons dans ce qui va suivre que β est positif; cependant non-seulement cette hypothèse n'est pas indispensable, mais nous aurons occasion de reconnaître dans la suite qu'il peut être utile de faire varier le signe de cette coordonnée.

Il est bon aussi de considérer les positions limites de ces ellipses et de ces hyperboles; pour $\beta = 0$, l'ellipse se réduit à la droite qui joint les foyers F et F'; l'équation $\alpha = 0$ représente la ligne Fx bornée en F et indéfinie dans le sens des x positifs, $\alpha = \pi$ représente la ligne F'x' indéfinie dans le sens des x négatifs; enfin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ détermine l'axe entier des y positifs, et $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ la partie négative de l'axe des y.

5. Reprenons l'équation

$$(5) \qquad m^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right) = \frac{d^2w}{dt^2},$$

qui par la substitution de

$$w = u \sin 2\lambda mt$$

devient

$$(6) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -4\lambda^2 u,$$

et substituons à x et y les coordonnées α et β.

Pour simplifier, posons

$$\mathrm{E}(\beta) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}, \quad \mathcal{E}(\beta) = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$$

et

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{E}^2(\beta)\sin^2\alpha + \mathcal{E}^2(\beta)\cos^2\alpha = \mathrm{E}^2(\beta) - \cos^2\alpha.$$

on a (IIe Leçon des *Coordonnées curvilignes* de M. Lamé)

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \left[\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2\right]\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\right),$$

et en différentiant les équations (3), on trouve

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\mathcal{E}(\beta)\cos\alpha}{c\mathrm{H}^2}, \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\beta}{dy} = \frac{-\mathrm{E}(\beta)\sin\alpha}{c\mathrm{H}^2},$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 = \frac{1}{c^2\mathrm{H}^2},$$

et on a, au lieu de l'équation (6),

$$\frac{1}{c^2\mathrm{H}^2}\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\right) = -4\lambda^2 u.$$

Posons

$$u = \mathrm{PQ},$$

et regardons P comme fonction de la seule α et Q comme fonction de la seule β, et nous aurons, au lieu de l'équation précédente,

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2}\mathrm{Q} + \mathrm{P}\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta^2} = -4\lambda^2c^2\left[\mathrm{E}^2(\beta) - \cos^2\alpha\right]$$

ou

$$-\frac{1}{\mathrm{P}}\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + 4\lambda^2c^2\cos^2\alpha = +\frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta^2} + 4\lambda^2c^2\mathrm{E}^2(\beta).$$

Comme le premier membre ne peut renfermer que α, et le second que β, ils sont égaux à une même constante N; de sorte qu'on a, au lieu d'une équation aux différences partielles, deux équations différentielles du second ordre

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + (\mathrm{N} - 4\lambda^2c^2\cos^2\alpha)\mathrm{P} = 0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta^2} - [\mathrm{N} - 4\lambda^2c^2\mathrm{E}^2(\beta)]\mathrm{Q} = 0$$

La première de ces équations convient à la membrane circulaire, si l'on y fait $c = 0$, et nous savons que l'on doit alors prendre pour la constante N le carré d'un nombre entier; il ne s'ensuit pas que la

même chose ait lieu ici; car on ne voit pas qu'elle ne dépende pas de λc; mais on est assuré que si la constante dépend de cette quantité, elle se réduit du moins au carré d'un nombre entier pour $c = 0$.

Supposons que nous connaissions une des valeurs de N, et que nous ayons trouvé des valeurs de P et Q, qui satisfassent à ces deux équations; alors la formule

$$w = PQ \sin 2\lambda m t$$

représentera un mouvement vibratoire possible de la membrane, si on détermine λ par la condition que Q soit nul pour la valeur de β relative au contour.

Sur la détermination de la constante N.

6. Le premier objet que nous devions nous proposer est donc de déterminer la constante N. Or, pour que l'expression de w puisse être admise, il faut que lorsqu'on y changera α en $\alpha + 2\pi$, w reste le même, puisque w continuera à donner le déplacement du même point de la membrane; ainsi P est nécessairement une fonction périodique et dont la période est 2π, et cette condition doit déterminer la constante N.

Rappelons des résultats obtenus par Sturm sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Toute équation de ce genre peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad \frac{d\left(L\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + Gy = 0,$$

L et G étant deux fonctions de x. Concevons que G renferme aussi un paramètre h, et donnons-lui un accroissement δh; alors G prendra la valeur $G + \delta G$, et y se changera en la fonction y_1 qui satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \frac{d\left(L\frac{dy_1}{dx}\right)}{dx} + (G + \delta G)y_1 = 0.$$

Multiplions les équations (1) et (2) par y_1 et y, et retranchons, nous

obtenons

$$y_1 \frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy}{dx}\right) - y\frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy_1}{dx}\right) - \delta \mathrm{G}\, yy_1 = 0.$$

Multiplions par dx, et intégrons entre les limites x_0 et X, nous aurons

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} y_1 \frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy}{dx}\right) dx - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} y\frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy_1}{dx}\right) dx - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} yy_1\, \delta\mathrm{G}\, dx = 0;$$

appliquons l'intégration par parties aux deux premiers termes, et supposons δh infiniment petit, l'accroissement de y le sera aussi, et nous aurons, en remplaçant y_1 par $y + \delta y$,

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}&\left[\mathrm{L}\left(\frac{dy}{dx}\delta y - y\delta\frac{dy}{dx}\right)\right]_{\mathrm{X}} - \left[\mathrm{L}\left(\frac{dy}{dx}\delta y - y\delta\frac{dy}{dx}\right)\right]_{x_0}\\ &\qquad\qquad - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} y^2\delta\mathrm{G}\, dx = 0.\end{aligned}\right.$$

Sturm suppose alors que la quantité $\mathrm{L}\frac{dx}{dy} : y$ subisse pour $x = x_0$, par l'accroissement de h, une variation d'un signe donné; pour la recherche que nous nous proposons, imaginons en la place que y soit nul ou maximum ou minimum pour $x = x_0$, et quelle que soit la valeur du paramètre h. Donc pour $x = x_0$, il faut faire ou $y = 0$, $\delta y = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = 0$, et $\delta\frac{dy}{dx} = 0$; dans les deux cas, le second crochet est nul, et il reste

$$(3)\qquad \left[\mathrm{L}\left(\frac{dy}{dx}\delta y - y\delta\frac{dy}{dx}\right)\right]_{\mathrm{X}} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} y^2\delta\mathrm{G}\, dx;$$

le premier membre est donc de même signe que l'accroissement que prend G par la variation du paramètre.

On peut maintenant reconnaître si les racines en x de l'équation $y_1 = 0$ sont plus petites ou plus grandes que celles de l'équation $y = 0$. y est une fonction de x et de h, et si pour $x = \mathrm{X}$ on a

$$y = 0,$$

dès qu'on donnera à h un accroissement ∂h, y ne sera plus nul, à moins que l'on ne donne aussi à x un accroissement ∂x tel, que l'on ait

$$\frac{dy}{dx}\partial x + \frac{dy}{dh}\partial h = 0,$$

ou

$$\frac{dy}{dx}\partial x + \partial y = 0,$$

et par conséquent la racine subit un accroissement égal à

$$(4) \qquad \partial x = -\frac{\partial y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Supposons L positif; y étant nul pour $x = X$, il résulte de la formule (3) que si ∂G est positif, $\frac{dy}{dx}\partial y$ est aussi positif, et, par suite de la formule (4), que ∂x est négatif; donc les racines de $y_1 = 0$ sont plus petites que celles de $y = 0$, et de même on voit que si ∂G est négatif, les racines de $y_1 = 0$ sont plus grandes que celles de $y = 0$.

Si nous imaginons ensuite que l'on donne au paramètre h, non plus un accroissement infiniment petit, mais un accroissement fini, et que h croisse de h à h_1, si en même temps G va en croissant tout du long de cet intervalle, ou va tout du long en décroissant, les conclusions précédentes, relatives aux racines de $y = 0$ et de $y_1 = 0$, sont applicables, comme on le reconnaît en divisant l'intervalle de h à h_1 en parties infiniment petites.

Ces considérations sont dues à Sturm (*Journal de M. Liouville*, 1re série, t. I, p. 106); mais nous allons montrer comment elles peuvent servir à reconnaître si une fonction est périodique, et nous obtiendrons des résultats nouveaux.

7. Essayons d'abord de supposer que N est le carré d'un nombre entier g^2, et, substituant la lettre h à λc, P est donné par l'équation

$$(5) \qquad \frac{d^2 P}{d\alpha^2} + (g^2 - 4h^2\cos^2\alpha)P = 0.$$

Il est très-aisé de reconnaître que la solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre, telle que les précédentes, peut ordinairement être partagée en deux solutions particulières, dont l'une soit nulle, et l'autre soit maximum ou minimum pour la valeur zéro donnée à la variable. Posons donc

$$P = P_1 + P_2,$$

P_1 étant une solution qui s'annule pour $\alpha = 0$ et P_2 une solution qui est maximum ou minimum pour cette valeur.

Ce sont les deux fonctions P_1 et P_2 que nous allons examiner. Dans le cas où h s'annule, elles satisfont à l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2 P'}{d\alpha^2} + g^2 P' = 0,$$

et P_1 se réduit à $A \sin g\alpha$, P_2 à $B \cos g\alpha$.

P_1 s'annule pour $\alpha = 0$, comme $P' = A \sin g\alpha$; or le coefficient de P', dans l'équation (6), est toujours plus grand que celui de P dans l'équation (5); il résulte donc de ce que nous avons vu ci-dessus que les racines de $P' = 0$ sont plus petites que celles de $P = 0$; or les racines de $P' = 0$ sont de 0 à 2π,

$$0, \quad \frac{\pi}{g}, \quad \frac{2\pi}{g}, \ldots, \quad \frac{(2g-1)\pi}{g}.$$

Donnons à h une valeur excessivement petite, et divisons, à partir de l'axe des x, une circonférence qui a son centre à l'origine en $2g$ parties égales, puis menons aux points de division les rayons Oa, Ob, Oc,... ; les racines de $P' = 0$ sont égales aux angles aOb, aOc,..., et les racines de $P_1 = 0$ sont plus grandes et représentées par les angles aOb', aOc',.... Mais lorsque après un tour sur la circonférence on revient au point a, P' s'annule de nouveau par la valeur $\alpha = 2\pi$, tandis que P_1, qui est nul pour $\alpha = 0$, ne l'est pas pour $\alpha = 2\pi$, mais pour une valeur un peu plus grande. P_1 ne reprend donc pas la même valeur quand on augmente l'arc α d'une circonférence.

Pour démontrer que P_2, tirée de l'équation (5), n'a pas 2π pour période, appliquons la formule (3), en remplaçant x par α, L et G

par 1 et $g^2 - 4h^2\cos^2\alpha$, y par P_2, x_0 et X par o et 2π, et nous aurons

$$\left(\frac{dP_2}{d\alpha}\delta P_2 - P_2\delta\frac{dP_2}{d\alpha}\right)_{2\pi} + 4(2h\delta h + \delta h^2)\int_0^{2\pi} P_2^2\cos^2\alpha\, d\alpha = 0,$$

formule où l'on ne doit tenir compte de δh^2 que lorsque h est nul.

Supposons que nous fassions varier h de la valeur zéro à la valeur infiniment petite δh; P_2, pour $h = 0$, se réduit à $B\cos g\alpha$, et il est alors maximum pour $\alpha = 2\pi$ comme pour $\alpha = 0$; ainsi, en faisant $h = 0$ dans cette formule, $\frac{dP_2}{d\alpha}$ s'annule, et l'on a

$$\left(P_2\delta\frac{dP_2}{d\alpha}\right)_{2\pi} = 4(\delta h)^2\int_0^{2\pi} P_2^2\cos^2\alpha\, d\alpha;$$

le second membre est essentiellement positif, donc $\delta\frac{dP_2}{d\alpha}$ n'est pas nul pour $\alpha = 2\pi$, ou $\frac{dP_2}{d\alpha}$ n'est pas nul pour $\alpha = 2\pi$ quand on fait $h = \delta h$; donc enfin P_2, qui est maximum pour $\alpha = 0$, ne l'est pas pour $\alpha = 2\pi$, et la fonction n'est pas périodique.

Si l'on prenait pour la constante

$$N = g^2 + 4h^2,$$

en désignant encore par g un nombre entier, l'équation qui donne P deviendrait

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (g^2 + 4h^2\sin^2\alpha)P = 0.$$

En définissant les solutions particulières P_1 et P_2 comme ci-dessus, on reconnaîtra que les racines de $P_1 = 0$ et de $P_2 = 0$ sont plus petites que celles de $A\sin g\alpha = 0$ et de $B\cos g\alpha = 0$, et l'on démontrera aussi, comme tout à l'heure, que P_1 et P_2 ne sont pas des fonctions périodiques.

8. Enfin, prenons pour N l'expression

$$N = g^2 + 2h^2,$$

nous aurons l'équation

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0,$$

et nous allons démontrer que P est alors une fonction périodique si h est excessivement petit, c'est-à-dire si on peut négliger les puissances de h^2 supérieures à la première [*].

Si nous ne considérons que les solutions qui sont nulles, ou maxima ou minima pour $\alpha = 0$, et que nous avons désignées par P_1 et P_2, nous avons, d'après (3), l'équation

$$(7)\qquad \frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha} = -2(2h\,\delta h + \delta h^2)\int_0^\alpha P^2\cos 2\alpha\, d\alpha.$$

Au lieu de laisser h quelconque, prenons-le égal à zéro, et donnons-lui l'accroissement δh; puis appliquons la formule (7) en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Si c'est P_1 que nous considérons, nous aurons

$$P_1^2\cos 2\alpha = \sin^2 g\alpha\cos 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 2(g+1)\alpha + \cos 2(g-1)\alpha}{4},$$

et si g n'est pas égal à 1, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_1^2\cos 2\alpha\, d\alpha = 0.$$

Si nous considérons P_2, nous avons

$$P_2^2\cos 2\alpha = \cos^2 g\alpha\cos 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 2(g+1)\alpha + \cos 2(g-1)\alpha}{4},$$

et si g n'est pas égal à 1, on a encore

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_2^2\cos 2\alpha\, d\alpha = 0;$$

[*] Toutefois, si $g = 1$, il faut prendre $N = 1 + h^2$ ou $= 1 + 3h^2$, selon qu'il s'agit de P_1 ou de P_2.

donc l'équation (7) se réduit dans les deux cas à

$$\left(\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha}\right)_{\frac{\pi}{2}} = 0; \tag{8}$$

mais pour $h = 0$, P_1 et P_2 deviennent $\sin g\alpha$ et $\cos g\alpha$, et l'une des deux fonctions est nulle et l'autre maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; or de cette formule on conclut que si P est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, δP l'est aussi, et que si $\frac{dP}{d\alpha}$ est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\delta\frac{dP}{d\alpha}$ l'est en même temps. Donc, pour une valeur très-petite de h et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, P_1 est nul ou maximum comme $\sin g\alpha$, et P_2 est nul ou maximum comme $\cos g\alpha$.

Supposons maintenant que h ne soit plus excessivement petit, mais qu'il ait une valeur quelconque; et, posant $N = R + 2h^2$, considérons l'équation

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0, \tag{9}$$

dans laquelle R dépend de h, et se réduit au carré g^2 d'un nombre entier pour $h = 0$; par l'application de l'équation (3), on a

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha} = \int_0^\alpha P^2(\delta R - 4h\,\delta h\cos 2\alpha)\,d\alpha;$$

alors imaginons que l'on sache déterminer la constante R de manière que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P^2(\delta R - 4h\,\delta h\cos 2\alpha)\,d\alpha$$

soit nulle, quel que soit h : la propriété que nous venons d'obtenir qoand h est très-petit a lieu pour une valeur quelconque de h, car on aura encore l'équation (8), et P sera nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, selon que $\sin g\alpha$ et $\cos g\alpha$, auquel il se réduit pour $h = 0$, est nul ou maximum.

Remarquons dès à présent que rien n'indique que, pour une même valeur de g, la constante R soit la même dans les fonctions P_1 et P_2; elle est en effet différente, et la solution générale de l'équation (9) ne peut être périodique. Pour fixer les idées, choisissons la constante de manière que l'on ait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_1^2(\delta R - 4h\,\delta h \cos 2\alpha)\,d\alpha = 0,$$

et je dis que la fonction P_1 reprendra les mêmes valeurs ou des valeurs égales et de signe contraire dans chaque quadrant, en sorte que α étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les quatre quantités

$$P_1(\alpha), \quad P_1(\pi - \alpha), \quad P_1(\pi + \alpha), \quad P_1(2\pi - \alpha)$$

sont égales, au signe près, et que P_1 est périodique.

Comme nous aurons occasion de le voir plus tard, si on pose $\nu = \cos\alpha$, la solution générale de l'équation différentielle qui donne P est la somme de deux solutions particulières qui se développent ainsi

$$P' = A_0 + A_1\nu^2 + A_2\nu^4 + A_3\nu^6 + \ldots,$$
$$P'' = B\nu + B_1\nu^3 + B_2\nu^5 + B_3\nu^7 + \ldots.$$

La première est maximum et la seconde nulle pour $\nu = 0$, ou pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Il résulte de là que P_1 est égal à P' ou à P'', selon qu'il est nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; or, si l'on change ν en $-\nu$ ou α en $\pi - \alpha$, P' reste invariable et P'' change de signe seulement; donc P_1 reste le même, au signe près, quand on remplace α par $\pi - \alpha$.

Pour passer au troisième quadrant, on remarque que la solution générale de P peut être partagée en deux solutions dont l'une est paire, et dont l'autre est impaire, suivant les puissances de $\nu' = \sin\alpha$; P_1, qui est nul pour $\alpha = \pi$, est égal à la solution impaire en ν', et on en conclut

$$P_1(\pi + \alpha) = -P_1(\pi - \alpha), \quad P_1(\pi + \alpha) = \pm P_1(\alpha).$$

Enfin, on peut obtenir de la même manière les valeurs de P_1 dans le quatrième quadrant. Donc la fonction P_1 reprend les mêmes valeurs au signe près dans chaque quadrant, et se comporte dans les changements de signe comme $\sin g\alpha$, et elle a 2π pour période.

Si l'on détermine la constante R de manière que l'on ait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_2^2\left(\frac{dR}{dh} - 4h\cos 2\alpha\right)d\alpha = 0,$$

on arrive à des conclusions semblables pour P_2, qui se comporte dans le passage d'un quadrant au suivant comme $\cos g\alpha$. Il n'est donc nécessaire d'étudier les fonctions P_1 et P_2 qu'entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

9. Si nous regardons d'abord h comme très-petit, la constante R se réduit à très-peu près à g^2, et l'équation différentielle à

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0.$$

Si l'on donne à h l'accroissement δh, toute racine de

$$P_1 = 0 \quad \text{ou de} \quad P_2 = 0$$

subit une variation dont la valeur est

$$\delta\alpha = -\delta P : \frac{dP}{d\alpha}.$$

On a la formule générale

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha}\\ &\quad = \left(\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha}\right)_a - 2(2h\delta h + \delta h^2)\int_a^\alpha P^2\cos 2\alpha\, d\alpha.\end{aligned}\right.$$

Faisons $a = 0$; supposons que P représente P_1 ou P_2, et que α soit une racine de $P = 0$, renfermée entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, l'équation précédente

devient

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P = -2(2h\delta h + \delta h^2)\int_0^{\alpha} P^2 \cos 2\alpha \, d\alpha.$$

Tous les éléments de l'intégrale sont positifs; donc $\frac{dP}{d\alpha}\delta P$ est négatif et la variation des racines positives, quand on donne à h l'accroissement δh.

Faisons $a = \frac{\pi}{2}$, et supposons que α soit maintenant une racine de $P = 0$, renfermée entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, on déduit de la même formule

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P = 2(2h\delta h + \delta h^2)\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} P^2 \cos 2\alpha \, d\alpha;$$

le second membre est négatif; donc l'accroissement de la racine est encore positif.

Supposons par exemple qu'il s'agisse de P_2, et que g soit pair; alors la fonction P est maximum comme $\cos g\alpha$ pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Si Ob, Oc, Od,... font avec Ox des angles égaux aux racines de l'équation $\cos g\alpha = 0$, ces droites pourront représenter des lignes nodales de la membrane circulaire, et les arcs bc, cd,... sont égaux entre eux et doubles des arcs extrêmes ab et ef du quadrant af.

Considérons une ellipse dont l'excentricité est très-petite, et menons les asymptotes des lignes nodales hyperboliques Ob', Oc', Od',...; il résulte de ce que nous avons démontré que les angles aOb', aOc', aOd',... sont respectivement plus grands que aOb, aOc,.... Mais il y a plus : les angles $b'Oc'$, $c'Od'$,... sont $> bOc$, cOd,... dans la première moitié du quadrant et sont moindres dans la seconde moitié.

Pour le prouver, désignons par α_1 et α_2 deux racines consécutives de l'équation $P_2 = 0$, et considérons la fonction

$$\Pi = A \sin g(\alpha - \alpha_1),$$

qui s'annule pour $\alpha = \alpha_1$; P_2 ne se réduit pas à Π pour $h = 0$; mais on peut imaginer une fonction P qui satisfasse à l'équation différen-

tielle du second ordre, et qui par la variation de h passe de Π à P_1 en restant constamment nulle pour $\alpha = \alpha_1$. Alors pour $\alpha = \alpha_1$, on aura

$$P = 0, \quad \delta P = 0,$$

et en faisant $\alpha = \alpha_2$ et $a = \alpha_1$ dans l'équation (10), on obtient

$$\left(\frac{dP}{d\alpha}\delta P\right)_{\alpha=\alpha_2} = -2(2h\delta h + \delta h^2)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P^2 \cos 2\alpha \, d\alpha;$$

si α_1 et α_2 sont moindres que $\frac{\pi}{4}$, l'intégrale du second membre est positive, et le premier membre est négatif; donc la variation de la racine α,

$$\delta\alpha_2 = -\delta P : \frac{dP}{d\alpha},$$

mais cette fois comptée à partir de α_1, est positive; donc l'intervalle des deux racines α_1 et α_2 a augmenté; il est donc plus grand que $\frac{2\pi}{g}$. On verrait qu'au contraire si α_1 et α_2 sont compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale est négative, et que l'intervalle entre deux racines diminue quand h croît, tout en gardant de très-petites valeurs.

10. Mais quelle que soit la grandeur de h et quel que soit le sens dans lequel varie la constante R, quand on donne un accroissement infiniment petit à h, les racines subissent des modifications infiniment petites, et celles qui étaient comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$ y resteront constamment; car Oa et Of sont des lignes où P_2 est maximum et ne peut s'annuler, et que par conséquent ces racines en changeant de grandeur ne peuvent franchir. Ensuite cette propriété appartient dans tous les cas aux fonctions P_1 et P_2, dont la première est nulle, et la seconde maximum pour $\alpha = 0$, tandis que l'une s'annule et l'autre est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, suivant la parité de g. Ainsi, par exemple, si P_2 s'annule pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il est impossible que par l'accroissement de h une racine

comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ franchisse la limite $\frac{\pi}{2}$; car si pour une valeur de h une racine comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ devenait égale à $\frac{\pi}{2}$, l'équation $P_2 = 0$ aurait une racine double pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; donc P et $\frac{dP}{d\alpha}$, et par suite les dérivées de tous les ordres, s'annuleraient ensemble pour une même valeur de α; ce qui est impossible.

Or pour $h = 0$ les fonctions P_1 et P_2 se réduisent à $\sin g\alpha$ et $\cos g\alpha$, et s'annulent g fois de o à π; donc quel que soit h, les équations $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ ont aussi g racines de o à π (en admettant parmi ces racines celle qui serait zéro, mais non celle qui serait égale à π).

Développements des fonctions P_1 *et* P_2 *suivant les puissances de* h.

11. Pour developper suivant les puissances de h les solutions P_1 et P_2 de l'équation

$$\frac{d^2 P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2 \cos 2\alpha) P = 0,$$

qui ont 2π pour période, et dont la première est nulle, la seconde maximum pour $\alpha = 0$, nous poserons

$$R = g^2 + \beta h^4 + \gamma h^6 + \delta h^8 + \ldots,$$

en désignant par g un nombre entier quelconque, et nous chercherons à déterminer les coefficients d'après la condition que P_1 et P_2 soient périodiques.

Considérons d'abord P_2; posons dans l'équation différentielle

$$P = P_2 = \cos g\alpha + h^2 \mathrm{p}, \quad R = g^2 + Bh^4,$$

et nous aurons

$$\frac{d^2 \mathrm{p}}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + Bh^4)\mathrm{p} - (2\cos 2\alpha \cos g\alpha - Bh^2 \cos g\alpha) = 0.$$

Posons ensuite

$$\mathrm{p} = p + h^2 \mathrm{p}_1,$$

et nous aurons

$$(\mathrm{I}) \qquad 0 = \frac{d^2 p}{d\alpha^2} + g^2 p - 2\cos 2\alpha \cos g\alpha,$$

$$(b) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2 \mathrm{p}_1}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha + \mathrm{B}h^4)\, \mathrm{p}_1 \\ \qquad + (-2\cos 2\alpha + \mathrm{B}h^2)\, p + \mathrm{B}\cos g\alpha. \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (I), nous remplacerons $2\cos 2\alpha \cos g\alpha$ par $\cos(g+2)\alpha + \cos(g-2)\alpha$, et nous poserons

$$p = a\cos(g+2)\alpha + b\cos g\alpha + c\cos(g-2)\alpha;$$

on trouve immédiatement

$$a = \frac{-1}{4(g+1)}, \quad c = \frac{1}{4(g-1)};$$

pour b, il n'est pas déterminé, et en effet P_2 se réduit à $\cos g\alpha$ pour $h = 0$; mais si l'on suppose que l'on ait obtenu son expression, et qu'on la multiplie par $1 + \mathrm{B}h^2$, cette nouvelle expression peut encore représenter P_2, et le coefficient b change par là d'une manière arbitraire.

Puisque nous pouvons donner à b la valeur que nous voulons, nous ferons

$$b = 0.$$

Dans l'équation (b), posons

$$\mathrm{p}_1 = p_1 + h^2 \mathrm{p}_2, \quad \mathrm{B} = \beta + \mathrm{C}h^2,$$

et nous aurons les deux équations

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d^2 p_1}{d\alpha^2} + g_2 p_1 - 2\cos 2\alpha p + \beta\cos g\alpha = 0,$$

$$(c) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2 \mathrm{p}_2}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6)\, \mathrm{p}_2 \\ \qquad + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C}h^4)\, p_1 \\ \qquad + (\beta + \mathrm{C}h^2)\, p + \mathrm{C}\cos g\alpha. \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (II), on doit remplacer $2\cos 2\alpha p$ par sa valeur

$$a\cos(g+4)\alpha + b\cos(g+2)\alpha \\ + (a+c)\cos g\alpha + b\cos(g-2)\alpha + c\cos(g-4)\alpha,$$

puis substituer pour p_1

$$p_1 = d\cos(g+4)\alpha + e\cos(g+2)\alpha \\ + f\cos g\alpha + h\cos(g-2)\alpha + k\cos(g-4)\alpha,$$

et on trouve, en égalant à zéro les coefficients des cosinus des arcs différents,

$$d = -\frac{a}{8(g+2)}, \quad e = -\frac{b}{4(g+1)}, \quad h = \frac{b}{4(g-1)}, \quad k = \frac{c}{8(g-2)},$$
$$\beta = a + c.$$

b est laissé arbitraire dans ces formules; si l'on y suppose $b = 0$, on a

$$d = \frac{1}{32(g+1)(g+2)}, \quad e = 0, \quad h = 0, \quad k = \frac{1}{32(g-1)(g-2)},$$
$$\beta = \frac{1}{2(g^2-1)}.$$

Le coefficient f reste encore indéterminé, et en effet, si l'on imagine obtenue l'expression de P_2 et qu'on la multiplie par $1 + Bh^2 + Ch^4$, on changera non-seulement le coefficient b d'une manière arbitraire, mais aussi le coefficient f; ce qu'il y a de plus simple est donc de faire $f = 0$.

Dans l'équation (c), posons

$$\mathrm{p}_2 = p_2 + h^2\mathrm{p}_3, \quad \mathrm{C} = \gamma + \mathrm{D}h^2,$$

et nous aurons

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2p_2}{d\alpha^2} + g^2p_2 - 2\cos 2\alpha p_1 + \beta p + \gamma\cos g\alpha = 0,$$

$$(d) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = \frac{d^2\mathrm{p}_3}{d\alpha^2} &+ (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6)\mathrm{p}_3 \\ &+ (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C}h^4)p_2 \\ &+ (\beta + \mathrm{C}h^2)p_1 + \mathrm{C}p + \mathrm{D}\cos g\alpha. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons dans l'équation (III) $2\cos 2\alpha p_1$ par

$$d\cos(g+6)\alpha + e\cos(g+4)\alpha + (d+f)\cos(g+2)\alpha + (e+h)\cos g\alpha$$
$$+ (k+f)\cos(g-2)\alpha + h\cos(g-4)\alpha + k\cos(g-6)\alpha,$$

et posons

$$p_2 = l\cos(g+6)\alpha + m\cos(g+4)\alpha + n\cos(g+2)\alpha$$
$$+ \varpi\cos g\alpha + q\cos(g-2)\alpha + r\cos(g-4)\alpha + s\cos(g-6)\alpha;$$

nous aurons

$$l = \frac{-d}{12(g+3)},\quad m = \frac{-e}{8(g+2)},\quad r = \frac{h}{8(g-2)},\quad s = \frac{k}{12(g-3)},$$
$$n = \frac{-d-f+\beta a}{4(g+1)},\quad q = \frac{k+f-\beta c}{4(g-1)},\quad \gamma = e+h-\beta b = 0.$$

Telles sont les expressions de $l, m, n, \ldots$, quelles que soient les valeurs données à b et f; et si on les suppose nulles, on obtient

$$l = \frac{-1}{2^7.3(g+1)(g+2)(g+3)},\quad m=0,\quad r=0,\quad s = \frac{1}{2^7.3(g-1)(g-2)(g-3)},$$
$$n = \frac{-(g^2+4g+7)}{2^7(g+1)^3(g-1)(g+2)},\quad q = \frac{g^2-4g+7}{2^7(g-1)^3(g+1)(g-2)},\quad \gamma = 0.$$

ϖ est indéterminé, comme b et f, et nous le ferons nul aussi.

Maintenant que l'on voit quel genre de simplification amène l'hypothèse de la nullité des constantes arbitraires, et que l'on reconnaît qu'elle amène l'évanouissement des termes de rang pair dans p, p_1, p_2, etc., faisons immédiatement ces réductions dans les calculs suivants. Posons dans l'équation (d)

$$\mathrm{p}_3 = p_3 + h^2\mathrm{p}_4,\quad \mathrm{D} = \delta + \mathrm{E}h^2,$$

nous obtiendrons les deux équations

$$(\mathrm{IV})\qquad \frac{d^2p_3}{d\alpha^2} + g^2p_3 - 2\cos 2\alpha p_2 + \beta p_1 + \delta\cos g\alpha = 0,$$

$$(e)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^2\mathrm{p}_4}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6)\mathrm{p}_4 \\ \quad + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C}h^4)p_3 + (\beta + \mathrm{C}h^2)p_2 \\ \quad + \mathrm{C}h^2p_1 + (\delta + \mathrm{E}h^2)p + \mathrm{E}\cos g\alpha \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (IV) $2\cos\alpha p_2$ par

$$l\cos(g+8)\alpha + (l+n)\cos(g+4)\alpha + (q+n)\cos g\alpha$$
$$+ (q+s)\cos(g-4)\alpha + s\cos(g-8)\alpha,$$

et posons

$$p_3 = R_1\cos(g+8)\alpha + R_2\cos(g+4)\alpha + R_3\cos g\alpha$$
$$+ R_4\cos(g-4)\alpha + R_5\cos(g-8)\alpha;$$

nous aurons

$$R_1 = \frac{-l}{16(g+4)},\quad R_2 = \frac{-(l+n)+\beta d}{8(g+2)},\quad R_4 = \frac{q+s-\beta k}{8(g-2)},\quad R_5 = \frac{s}{16(g-4)},$$
$$\delta = q+n,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$R_1 = \frac{1}{2^{11}.3(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)},\quad R_5 = \frac{1}{2^{11}.3(g-1)(g-2)(g-3)(g-4)},$$
$$R_2 = \frac{g^3+7g^2+20g+20}{2^8.3(g+1)^3(g-1)(g+2)^2(g+3)},\quad R_4 = \frac{g^3-7g^2+20g-20}{2^8.3(g-1)^3(g+1)(g-2)^2(g-3)},$$
$$\delta = \frac{5g^2+7}{32(g^2-1)^3(g^2-2^2)};$$

ajoutons à ces valeurs $R_3 = 0$.

Si nous posons encore

$$\mathrm{p}_4 = p_4 + h^2\mathrm{p}_5,\quad \mathrm{E} = \varepsilon + \mathrm{H}h^2,$$

p_4 nous sera donné par l'équation

$$\frac{d^2p_4}{d\alpha^2} + g^2p_4 - 2\cos 2\alpha p_3 + \beta p_2 + \delta p + \varepsilon\cos g\alpha = 0,$$

et nous aurons

$$p_4 = S_1\cos(g+10)\alpha + S_2\cos(g+6)\alpha + S_3\cos(g+2)\alpha$$
$$+ S_4\cos(g-2)\alpha + S_5\cos(g-6)\alpha + S_6\cos(g-2)\alpha,$$

en prenant

$$S_1 = \frac{-R_1}{4.5(g+5)}, \quad S_2 = \frac{-R_1 - R_2 + \beta l}{4.3(g+3)}, \quad S_3 = \frac{-R_2 + \beta n + \delta a}{4(g+1)},$$

$$S_4 = \frac{R_4 - \beta q - \delta c}{4(g-1)}, \quad S_5 = \frac{R_4 + R_5 - \beta s}{4.3(g-3)}, \quad S_6 = \frac{R_5}{4.5(g-5)},$$

$$\varepsilon = 0,$$

ou

$$S_1 = \frac{-1}{2^{11}.3.4.5(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)(g+5)}, \quad S_6 = \frac{1}{2^{11}.3.4.5(g-1)(g-2)(g-3)(g-4)(g-5)},$$

$$S_2 = \frac{-(g^4 + 11g^3 + 49g^2 + 101g + 78)}{2^{13}(g+1)^3(g+2)^2(g+3)^2(g+4)(g-1)}, \quad S_5 = \frac{g^4 - 11g^3 + 49g^2 - 101g + 78}{2^{13}(g-1)^3(g-2)^2(g-3)^2(g-4)(g+1)},$$

$$S_3 = \frac{-(g^7 + 7g^6 + 18g^5 + 24g^4 + 63g^3 + 81g^2 + 206g + 464)}{2^{10}.3(g+1)^5(g+2)^2(g+3)(g-1)^3(g-2)},$$

$$S_4 = \frac{g^7 - 7g^6 + 18g^5 - 24g^4 + 63g^3 - 81g^2 + 206g - 464}{2^{10}.3(g-1)^5(g-2)^2(g-3)(g+1)^3(g+2)}.$$

Pour terminer ce calcul, remarquons que le coefficient η de h^{12} dans la constante a pour valeur

$$\eta = S_3 + S_4,$$

et, en remplaçant S_3 et S_4 par leurs expressions,

$$\eta = \frac{9g^6 + 22g^4 - 203g^2 - 116}{2^6(g^2-1)^5(g^2-2^2)^2(g^2-3^2)}.$$

Ainsi, en mettant dans R les valeurs des premiers termes, on obtient

$$(l) \quad \left\{ \begin{aligned} R = g^2 &+ \frac{1}{2(g^2-1)} h^4 + \frac{5g^2+7}{32(g^2-1)^3(g^2-4)} h^8 \\ &+ \frac{9g^6 + 22g^4 - 203g^2 - 116}{64(g^2-1)^5(g^2-4)^2(g^2-9)} h^{12} + \ldots \end{aligned} \right.$$

12. Il est temps de remarquer que l'on ne peut continuer ainsi le développement de P_2 et de la constante R sans se préoccuper de la valeur du nombre entier g; car le coefficient de h^4 contient en dénominateur le facteur $g-1$, le coefficient de h^8 le facteur $g-2$, le coefficient de h^{12} le facteur $g-3$, et ainsi de suite; de sorte que, quel que

soit le nombre entier pris pour g, on finira par trouver un terme infini. On doit même arrêter le développement de R avant la rencontre d'un terme infini; car, pour qu'un terme de la constante puisse être accepté, il faut que le terme de même ordre de P_2 puisse lui-même l'être.

Pour plus de clarté, considérons un cas particulier, celui de $g=4$ par exemple. Les coefficients de h^8 et de h^{12} dans R conservent une valeur finie et doivent cependant être rejetés. Pour le reconnaître, reprenons le calcul de p_3, qui demande à être modifié, car la valeur de R_5 qui y figure devient infinie.

L'expression de $2\cos 2\alpha p_2$ devient

$$l\cos 12\alpha + (l+n)\cos 8\alpha + (q+n+s)\cos 4\alpha + q + s,$$

et les termes en $\cos g\alpha$ et $\cos(g-8)\alpha$ se réunissent en un seul, en $\cos 4\alpha$.

Nous substituerons dans l'équation (IV)

$$p_3 = R_1 \cos 12\alpha + R_2 \cos 8\alpha + R_3 \cos 4\alpha + R_4,$$

pour déterminer les coefficients; mais dans le résultat de la substitution, le coefficient de $\cos 4\alpha$ devant être nul, on obtient

$$\delta = q + n + s;$$

la valeur de δ doit donc être augmentée de la quantité s; on a

$$q + n = \frac{87}{2^7.3^4.5^2}, \quad s = \frac{1}{2^8.3^2},$$

et par suite

$$\delta = \frac{433}{2^8.3^3.5^2}.$$

On voit clairement comment on continuerait ce développement.

Si g est >4, les trois premiers termes de R sont ceux que l'on trouve dans l'expression (l); si g est >6, on doit encore prendre dans le développement (l) le terme en h^{12}, et ainsi de suite.

Nous allons considérer le développement de P_2 et les premiers termes de R quand g est inférieur à 4.

Si g est égal à zéro, le développement que nous avons trouvé pour P_2 est applicable, et c'est même le seul cas où l'on puisse l'appliquer aussi loin que l'on veut.

Si $g = 2$, on obtient, par un calcul spécial,

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos 2\alpha + h^2\left(-\frac{1}{12}\cos 4\alpha + \frac{1}{4}\right) + \frac{h^4}{384}\cos 6\alpha \\
- h^6\left(\frac{1}{23040}\cos 8\alpha + \frac{43}{13824}\cos 4\alpha + \frac{5}{192}\right) \\
+ h^8\left(\frac{1}{2211840}\cos 10\alpha + \frac{287}{2211840}\cos 6\alpha\right) \\
+ h^{10}\left(\frac{-1}{309657600}\cos 12\alpha - \frac{41}{16588800}\cos 8\alpha \right.\\
\left. + \frac{21059}{79626240}\cos 4\alpha + \frac{1363}{221184}\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\text{(A)} \qquad R = 4 + \frac{5}{12}h^4 - \frac{763}{13824}h^8 + \frac{1002419}{79626240}h^{12} + \ldots.$$

Si $g = 4$, on a

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos 4\alpha + h^2\left(-\frac{1}{20}\cos 6\alpha + \frac{1}{12}\cos 2\alpha\right) + h^4\left(\frac{1}{960}\cos 8\alpha + \frac{1}{192}\right) \\
+ h^6\left(\frac{-1}{80640}\cos 10\alpha - \frac{13}{96000}\cos 6\alpha + \frac{11}{17280}\cos 2\alpha\right) \\
+ h^8\left(\frac{1}{10321920}\cos 12\alpha + \frac{23}{6048000}\cos 8\alpha - \frac{1}{92160}\right) \\
- h^{10}\left(\frac{1}{1857945600}\cos 14\alpha + \frac{53}{1032192000}\cos 10\alpha \right.\\
\left. + \frac{4037}{2419200000}\cos 6\alpha + \frac{439}{62208000}\cos 2\alpha\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\text{(B)} \qquad R = 16 + \frac{1}{30}h^4 + \frac{433}{864000}h^8 - \frac{189983}{21772800000}h^{12} + \ldots.$$

Les développements (A) et (B) ne contiennent que des puissances paires de h^4, et nous démontrerons plus loin que R jouit de cette propriété toutes les fois que g est pair.

Pour $g = 1$, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos\alpha - \frac{h^2}{8}\cos 3\alpha + h^4\left(\frac{1}{192}\cos 5\alpha - \frac{1}{64}\cos 3\alpha\right) \\
- h^6\left(\frac{1}{9216}\cos 7\alpha - \frac{1}{1152}\cos 5\alpha + \frac{1}{1536}\cos 3\alpha\right) \\
- h^8\left(\frac{1}{737280}\cos 9\alpha - \frac{1}{49152}\cos 7\alpha \right. \\
\left. + \frac{1}{24576}\cos 5\alpha + \frac{11}{36864}\cos 3\alpha\right) + \ldots ;
\end{aligned}$$

$$R = 1 + h^2 - \frac{1}{8}h^4 - \frac{1}{64}h^6 - \frac{1}{1536}h^8 + \frac{11}{36864}h^{10} + \ldots .$$

Pour $g = 3$, on a

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos 3\alpha + h^2\left(-\frac{1}{16}\cos 5\alpha + \frac{1}{12}\cos\alpha\right) \\
+ h^4\left(\frac{1}{640}\cos 7\alpha + \frac{1}{64}\cos\alpha\right) \\
+ h^6\left(\frac{-1}{46080}\cos 9\alpha - \frac{7}{20480}\cos 5\alpha + \frac{1}{768}\cos\alpha\right) \\
+ h^8\left(\frac{1}{2^{11}.3^2.5.7}\cos 11\alpha + \frac{17}{2^{15}.3^2.5}\cos 7\alpha \right. \\
\left. - \frac{1}{2^{14}}\cos 5\alpha - \frac{1}{2^{13}}\cos\alpha\right) + \ldots ;
\end{aligned}$$

$$R = 9 + \frac{1}{16}h^4 + \frac{1}{64}h^6 + \frac{59}{61440}h^8 - \frac{3}{16384}h^{10} + \ldots .$$

13. Proposons-nous maintenant de développer P_1, et comme pour une même valeur de g la constante R a une valeur différente dans P_1 et P_2, représentons-la maintenant par R'. Ainsi nous avons l'équation différentielle

$$\frac{d^2 P_1}{d\alpha^2} + (R' - 2h^2\cos 2\alpha)P_1 = 0, \tag{m}$$

et il faut trouver la solution qui s'annule pour $\alpha = 0$ et choisir

$$R' = g^2 + \beta h^4 + \gamma h^6 + \delta h^8 + \varepsilon h^{10} + \eta h^{12} + \ldots$$

de manière qu'elle soit périodique. Posons

$$P_1 = \sin g\alpha + h^2 p + h^4 p_1 + h^6 p_2 + h^8 p_3 + \ldots,$$

et nous aurons exactement les mêmes calculs que pour P_2, avec le seul changement des cosinus en sinus; ainsi nous aurons

$$\begin{aligned} p &= a\sin(g+2)\alpha + c\sin(g-2)\alpha, \\ p_1 &= d\sin(g+4)\alpha + k\sin(g-4)\alpha, \\ p_2 &= l\sin(g+6)\alpha + n\sin(g+2)\alpha + q\sin(g-2)\alpha \\ &\quad + s\sin(g-6)\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et a, c, d, k ont les mêmes valeurs que dans l'expression de P_2; on a donc encore pour la constante

$$\begin{aligned} R' = g^2 &+ \frac{1}{2(g^2-1)} h^4 + \frac{5g^2+7}{32(g^2-1)^3(g^2-4)} h^8 \\ &+ \frac{9g^6+22g^4-203g^2-116}{64(g^2-1)^5(g^2-4)^2(g^2-9)} h^{12} + \ldots, \end{aligned}$$

et ce développement doit être arrêté au même terme que dans R; ensuite, quoique les premiers termes de R et de R′ soient les mêmes, ces deux constantes ne sont pas égales, et les deux séries se séparent dès le terme à partir duquel on est obligé de remplacer g par sa valeur particulière.

14. Quand on a obtenu la valeur de P_2 pour une valeur impaire de g, il est aisé d'en déduire celle de P_1 pour la même valeur de g. En effet, si P_2 est donné par l'équation

$$(n) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + \left[R(g^2, h^2) - 2h^2\cos 2\alpha\right] P = 0,$$

en changeant h^2 en $-h^2$ et α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, on aura une fonction périodique qui satisfera à l'équation

$$(p) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + \left[R(g^2, -h^2) - 2h^2\cos 2\alpha\right] P = 0,$$

de même forme que (m), et si g est impair, les cosinus de P_2 se changent en sinus; on a donc l'expression de P_1, et de plus on voit qu'on obtient la constante R', qui convient à P_1, en changeant dans R h^2 en $-h^2$.

D'après cela, pour $g = 1$ on a

$$P_1 = \sin\alpha - \frac{h^2}{8}\sin 3\alpha + h^4\left(\frac{1}{192}\sin 5\alpha + \frac{1}{64}\sin 3\alpha\right)$$
$$- h^6\left(\frac{1}{9216}\sin 7\alpha + \frac{1}{1152}\sin 5\alpha + \frac{1}{1536}\sin 3\alpha\right)$$
$$+ h^8\left(\frac{1}{737280}\sin 9\alpha + \frac{1}{49152}\sin 7\alpha\right.$$
$$\left. + \frac{1}{24576}\sin 5\alpha - \frac{11}{36864}\sin 3\alpha\right) + \ldots;$$

$$R' = 1 - h^2 - \frac{1}{8}h^4 + \frac{1}{64}h^6 - \frac{1}{1536}h^8 - \frac{11}{36864}h^{10} + \ldots.$$

Et pour $g = 3$ on a

$$P_1 = \sin 3\alpha + h^2\left(-\frac{1}{16}\sin 5\alpha + \frac{1}{12}\sin\alpha\right)$$
$$+ h^4\left(\frac{1}{640}\sin 7\alpha + \frac{1}{64}\sin\alpha\right)$$
$$+ h^6\left(\frac{-1}{46080}\sin 9\alpha - \frac{7}{20480}\sin 5\alpha + \frac{1}{768}\sin\alpha\right)$$
$$+ h^8\left(\frac{1}{2^{14}.3^2.5.7}\sin 11\alpha + \frac{17}{2^5.3^2.5}\sin 7\alpha\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{14}}\sin 5\alpha + \frac{1}{2^{13}}\sin\alpha\right) + \ldots;$$

$$R' = 9 + \frac{1}{16}h^4 - \frac{1}{64}h^6 + \frac{59}{61440}h^8 + \frac{3}{16384}h^{10} + \ldots.$$

Si g est pair et que P_2 soit donné par l'équation (n), en changeant h^2 en $-h^2$ et α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dans P_2, on aura une fonction P qui satisfera à l'équation (p); mais les cosinus restent des cosinus dans ce changement; donc la nouvelle expression appartient encore à P_2, et on en conclut

$$R(g^2, -h^2) = R(g^2, h^2).$$

Le même raisonnement est applicable à P_1; par conséquent, si g est pair, P_1 ne change pas quand on remplace α par $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et h^2 par $-h^2$, et R' ne renferme que des puissances quatrièmes de h.

Par un calcul spécial, on trouve, pour $g = 2$,

$$\begin{aligned}
P_1 = \sin 2\alpha - \frac{h^2}{12}\sin 4\alpha + \frac{h^4}{384}\sin 6\alpha \\
+ h^6\left(\frac{-1}{23040}\sin 8\alpha + \frac{5}{13824}\sin 4\alpha\right) \\
+ h^8\left(\frac{1}{2211840}\sin 10\alpha - \frac{37}{2209140}\sin 6\alpha\right) \\
+ h^{10}\left(\frac{-1}{309657600}\sin 12\alpha + \frac{11}{33177600}\sin 8\alpha \right.\\
\left. - \frac{289}{79626240}\sin 4\alpha\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$R' = 4 - \frac{1}{12}h^4 + \frac{5}{13824}h^8 - \frac{289}{79626240}h^{12} + \ldots.$$

Pour $g = 4$, on a

$$\begin{aligned}
P_1 = \sin 4\alpha + h^2\left(-\frac{1}{20}\sin 6\alpha + \frac{1}{12}\sin 2\alpha\right) + \frac{h^4}{960}\sin 8\alpha \\
- h^6\left(\frac{1}{80640}\sin 10\alpha + \frac{13}{96000}\sin 6\alpha - \frac{1}{4320}\sin 2\alpha\right) \\
+ h^8\left(\frac{1}{10321920}\sin 12\alpha + \frac{23}{6048000}\sin 8\alpha\right) \\
+ h^{10}\left(\frac{-1}{1857945600}\sin 14\alpha - \frac{53}{1032192000}\sin 10\alpha \right.\\
\left. + \frac{293}{2419200000}\sin 6\alpha + \frac{397}{124416000}\sin 2\alpha\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$R' = 16 + \frac{1}{30}h^4 - \frac{317}{864000}h^8 + \frac{4507}{1360800000}h^{12} + \ldots.$$

Sur les fonctions Q *qui doivent être associées à* P_1 *et* P_2.

15. On passe de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0$$

à celle qui donne Q

$$(2) \qquad \frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - 2h^2 E(2\beta)]Q = 0,$$

en changeant α en βi et P en Q, et R a la même valeur dans l'une et l'autre; donc si dans les valeurs de P_1 et P_2 on change α en βi, on aura des solutions de l'équation (2). Or il est aisé de comprendre que si la membrane se plie dans un mouvement vibratoire le long des droites FA et F'A', comprises entre les foyers et les sommets du grand axe, et qui ont pour équations $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, elle doit aussi se plier tout le long de la droite FF' menée entre les foyers et qui est donnée par $\beta = 0$. Donc

$$P_1 = \sin g\alpha + h^2[a\sin(g+2)\alpha + b\sin(g-2)\alpha] + \ldots,$$

qui s'annule pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, doit effectivement s'associer à la fonction

$$Q_1 = A\left\{\frac{e^{\beta g} - e^{-\beta g}}{2} + h^2\left[a\frac{e^{\beta(g+2)} - e^{-\beta(g+2)}}{2} + b\frac{e^{\beta(g+2)} - e^{-\beta(g-2)}}{2}\right] + \ldots\right\},$$

qui se déduit de P_1 en changeant α en βi, et qui s'annule pour $\beta = 0$. De même

$$P_2 = \cos g\alpha + h^2[a\cos(g+2)\alpha + b\cos(g-2)\alpha] + \ldots,$$

qui est maximum ou minimum pour $\alpha = 0$, doit s'associer avec

$$Q_2 = A\left\{E(\beta g) + h^2\left[aE(\overline{g+2}\,\beta) + bE(\overline{g-2}\,\beta)\right]\right\} + \ldots,$$

qui est maximum ou minimum pour $\beta = 0$.

Toutefois les expressions de P_1 et P_2 pourront être convergentes, sans que celles de Q_1 et Q_2 le soient, pour toutes les valeurs que peut prendre β dans l'intérieur de la membrane; mais, pour le moment, nous voulons plutôt faire remarquer les caractères des fonctions Q_1 et Q_2 que de donner un moyen de les calculer.

Sur les lignes nodales.

16. Nous pouvons déjà faire quelques réflexions sur la nature des lignes nodales d'une membrane elliptique. Nous avons vu que dans un mouvement vibratoire simple le déplacement d'un point de la membrane est donné par la formule

$$w = PQ \sin 2\lambda mt,$$

où P et Q satisfont aux deux équations (1) et (2) du numéro précédent, et où λ est déterminé par la fixité du contour. Et P étant une fonction de α à période 2π, on ne peut prendre pour elle que P_1 et P_2, de sorte que Q_1 et Q_2 étant les valeurs correspondantes de Q, on a deux genres de solutions donnés par les formules

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda_1 mt,$$
$$w = P_2 Q_2 \sin 2\lambda_2 mt,$$

et les lignes nodales ont pour équations, dans le premier genre,

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0,$$

et, dans le second genre,

$$P_2 = 0, \quad Q_2 = 0.$$

Dans le premier genre, le grand axe est une ligne nodale; dans le second genre, il est en maximum ou en minimum de vibration.

Les équations $Q_1 = 0$ et $Q_2 = 0$ donnent des ellipses qui ont les mêmes foyers que le contour de la membrane. Les équations $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ déterminent les asymptotes des lignes nodales hyperboliques qui ont encore les mêmes foyers; et le nombre entier g qui entre dans P_1 et P_2 indique combien de fois ces fonctions s'annulent de 0 à π, c'est-à-dire le nombre des lignes nodales hyperboliques, en désignant par *ligne nodale hyperbolique* les deux branches d'une hyperbole terminées au grand axe qui ont la même asymptote. Dans cette manière de voir, une hyperbole est comptée pour deux de ces lignes; mais si le

grand axe ou le petit axe sont sans mouvement, ils ne sont comptés que pour une seule ligne hyperbolique.

Si g est nul, le mouvement ne peut être que du second genre, et il n'existe aucune ligne hyperbolique.

Si $g = 1$, on n'a de ligne nodale hyperbolique que le grand axe dans le premier genre et que le petit axe dans le second genre.

Si $g = 2$, dans le premier genre on a pour ces lignes le petit et le grand axe, et dans le second genre une hyperbole.

Si $g = 3$, on a pour ces lignes nodales une hyperbole et soit le grand axe, soit le petit axe, suivant que le mouvement est du premier ou du second genre. Et ainsi de suite.

Quand les séries trouvées pour P_1 et P_2 seront très-convergentes, comme on connaît exactement le nombre des racines comprises de 0 à $\frac{\pi}{2}$, nos formules seront très-commodes, et il sera aisé de séparer ces racines par des substitutions et de les calculer avec l'approximation voulue par l'expérience.

Mais si h, qui est proportionnel à l'excentricité de la membrane et à la hauteur du son, est assez grand, ces séries ne sont plus convergentes ou le sont trop peu pour être d'un usage commode; on ne peut même plus se servir des développements de R et R′ suivant les puissances de h et l'on est obligé de recourir à d'autres méthodes.

Développements des fonctions P_1 *et* P_2 *suivant les puissances de* $\sin\alpha$ *et de* $\cos\alpha$.

17. Si nous posons

$$\nu = \cos\alpha$$

et que nous prenions ν pour variable, l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 P}{d\alpha^2} + [R(g^2, h^2) - 2h^2 \cos 2\alpha] P = 0$$

se transforme en la suivante :

$$(a) \qquad \frac{d^2 P}{d\nu^2}(1 - \nu^2) - \frac{dP}{d\nu}\nu + [R(g^2, h^2) + 2h^2 - 4h^2\nu^2] P = 0;$$

et si nous prenons

$$v' = \sin \alpha$$

pour variable, elle se change en cette autre :

$$(b) \quad \frac{d^2 P}{dv'^2}(1 - v'^2) - \frac{dP}{dv'} v' + [R(g^2, h^2) - 2h^2 + 4h^2 v'^2] P = 0.$$

Supposons d'abord g pair : la constante $R(g^2, h^2)$, comme nous avons vu, ne dépend que des puissances paires de h^2 ; donc on passe de l'équation (a) à l'équation (b) en changeant v en v' et h^2 en $-h^2$, et l'on en conclut cette propriété remarquable que, lorsque g est pair, P_1 et P_2 sont des fonctions de v qui restent invariables lorsqu'on y change v en v' et h en $-h^2$.

Supposons g impair : si P_1 est solution de l'équation (1), nous savons que la valeur de P_2 correspondant à la même valeur de g est solution de la même équation dans laquelle on remplace $R(g^2, h^2)$ par $R(g^2, -h^2)$; alors P_1 satisfait aussi aux deux équations (a) et (b), et P_2 aux deux suivantes :

$$(c) \quad \frac{d^2 P}{dv^2}(1 - v^2) - \frac{dP}{dv} v + [R(g^2, -h^2) + 2h^2 - 4h^2 v^2] P = 0,$$

$$(d) \quad \frac{d^2 P}{dv'^2}(1 - v'^2) - \frac{dP}{dv'} v' + [R(g^2, -h^2) - 2h^2 + 4h^2 v'^2] P = 0.$$

On passe de (a) à (d) ou de (c) à (b) en changeant v en v' et h^2 en $-h^2$; donc, par les mêmes changements, on passe de l'expression de P_1 à celle de P_2, ou inversement de celle de P_2 à celle de P_1.

Considérons l'équation (a) et posons, pour simplifier l'écriture,

$$R(g^2, h^2) + 2h^2 = m.$$

La solution générale de cette équation est la somme de deux solutions particulieres, l'une Π_2 paire en v et l'autre Π_1 impaire. Pour la fonction Π_2, posons

$$(e) \quad \Pi_2 = k_0 + k_1 v^2 + k_2 v^4 + k_3 v^6 + \ldots + k_{s-1} v^{2s-2} + k_s v^{2s} + k_{s+1} v^{2s+2} + \ldots$$

et nous déterminerons, en substituant dans (a), les coefficients

$$k_1 = -\frac{mk_0}{2},\quad k_2 = \frac{m(m-4)+8h^2}{2.3.4}k_0,$$
$$k_3 = \frac{-m(m-4)(m-16)-56h^2m+128h^2}{2.3.4.5.6}k_0,\ldots$$

En égalant à zéro le coefficient de ν^{2s} dans le résultat de la substitution, on obtient la formule

$$(2)\qquad k_{s+1} = \frac{(4s^2-m)k_s+4h^2k_{s-1}}{(2s+1)(2s+2)},$$

qui montre comment chaque terme se déduit des deux précédents.

Pour la fonction Π_1, posons

$$(f)\qquad \left\{\begin{aligned} \Pi_1 &= a_1\nu + a_2\nu^3 + a_3\nu^5 + a_4\nu^7 + \ldots \\ &\quad + a_{s-1}\nu^{2s-3} + a_s\nu^{2s-1} + a_{s+1}\nu^{2s+1} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

et nous aurons pour les coefficients des premiers termes

$$a_2 = -\frac{m-1}{2.3}a_1,\quad a_3 = \frac{(m-1)(m-9)+24h^2}{2.3.4.5}a_1,$$
$$a_4 = \frac{-(m-1)(m-9)(m-25)+(170-26m)4h^2}{2.3.4.5.6.7},\ldots,$$

et chaque terme se déduit des deux précédents par la relation

$$(3)\qquad a_{s+1} = \frac{[(2s-1)^2-m]a_s+4h^2a_{s-1}}{2s(2s+1)}.$$

Supposons la constante R choisie de manière que P_1 satisfasse à l'équation (a); P_1 est nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et se comporte en cette propriété comme $\sin g\alpha$, auquel il se réduit, à un facteur constant près, pour $h = 0$; par conséquent il est nul si g est pair, et il est maximum si g est impair. Or, pour $\nu = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$, Π_1 est nul et Π_2 est maximum; donc si g est pair P_1 est égal à Π_1, et si g est impair P_1 est égal à Π_2, à un facteur constant près. Imaginons, au contraire, R choisi

de manière que P_2 satisfasse à l'équation (a), et nous voyons de même que P_2 est nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, selon que g est impair ou pair; et on en conclut que P_2 est égal, à un facteur près, à Π_1 si g est impair, et à Π_2 si g est pair.

18. Venons à l'équation (b), et posons

$$R - 2h^2 = m';$$

la solution générale de cette équation est encore la somme de deux solutions particulières, dont l'une est paire et l'autre impaire en v'. Si R est choisi de manière que P_2 soit solution de cette équation, alors P_2, qui est maximum pour $v' = 0$, se confond avec la solution particulière qui jouit de cette propriété, et on a

$$(e')\quad P_2 = k'_0 + k'_1 v'^2 + k'_2 v'^4 + \ldots + k'_{s-1} v'^{2s-2} + k'_s v'^{2s} + k'_{s+1} v'^{2s+2} + \ldots,$$

expression où k'_0, k'_1, k'_2,... se déduisent de k_0, k_1, k_2,..., par le changement de h^2 en $-h^2$. Ainsi on a

$$k'_1 = -\frac{m' k'_0}{1.2}, \quad k'_1 = \frac{m'(m'-4) - 8h^2}{1.2\ 3.4} k'_0, \ldots,$$

et la loi qui lie entre eux les coefficients de trois termes consécutifs est

$$(4)\qquad k'_{s+1} = \frac{(4s^2 - m')k'_s - 4h^2 k'_{s-1}}{(2s+1)(2s+2)}.$$

Si, au contraire, R est choisi de manière que P_1 soit solution de l'équation (1), P_1, devant s'annuler pour $v' = 0$, se confond avec la solution impaire en v' de (b), et on a

$$(f')\quad P_1 = a'_1 v' + a'_2 v'^3 + a'_3 v'^5 + \ldots + a'_{s-1} v'^{2s-3} + a'_s v'^{2s-1} + a'_{s+1} v'^{2s+1} + \ldots.$$

a'_1, a'_2, a'_3,... étant des quantités qui se déduisent de a_1, a_2, a_3,... par le changement de h^2 en $-h^2$; ainsi on a d'abord

$$a'_2 = -\frac{m'-1}{2.3} a'_1, \quad a'_3 = \frac{(m'-1)(m'-9) - 24h^2}{2.3.4.5} a'_1, \ldots,$$

et ensuite la formule générale

(5) $$a'_{s+1} = \frac{[(2s-1)^2 - m']a'_s - 4h^2 a'_{s-1}}{2s(2s+1)}.$$

Ici il est bien important de remarquer que si l'on remplace R par un nombre quelconque, la fonction (e') ou la fonction (f') n'est égale à aucune des deux fonctions (e) et (f); car la fonction (f'), par exemple, qui est nulle pour $v'=0$ ou $\alpha=0$, n'est ni nulle ni maximum pour $\alpha=\frac{\pi}{2}$, et ne saurait, par conséquent, se confondre avec l'une ni l'autre des deux fonctions (e) et (f). C'est seulement si R est déterminé de manière que l'équation (1) ait une solution de période 2π, que, cette solution devant être nulle ou maximum pour $\alpha=0$ et $\alpha=\frac{\pi}{2}$, l'une des deux expressions (e') et (f'), qui lui est égale, est identique, à un facteur près, à l'une des deux expressions (e) et (f).

Par exemple, supposons g pair, et, par suite, P_2 égal au produit de Π_2 par une constante A, si R a été pris convenablement. Par la considération des valeurs de ces fonctions pour $\alpha = 45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, on obtient les formules

$$A\left(h_0 + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{4} + \frac{h_3}{16} + \ldots\right) = k'_0 + \frac{k'_1}{2} + \frac{k'_2}{4} + \ldots,$$

$$A\left(h_0 + h_1\frac{3}{4} + h_2\frac{9}{16} + \ldots\right) = k'_0 + \frac{k'_1}{4} + \frac{k'_2}{16} + \ldots,$$

$$\frac{1}{A}\left(k'_0 + k'_1\frac{3}{4} + k'_2\frac{9}{16} + \ldots\right) = h_0 + \frac{h_1}{4} + \frac{h_2}{16} + \ldots,$$

dont chacune peut déterminer le facteur A.

Nous avons admis jusqu'à présent que R était connu; mais s'il ne l'est pas, en éliminant A entre deux de ces formules, on obtiendra une équation dont les deux membres seront les produits de deux séries, qui ne renfermera d'inconnue que R et pourra servir à la déterminer.

Il est extrêmement aisé de reconnaître que les séries (e), (f), (e'), (f') sont convergentes, tant que v ou v' est <1. Soit plus généralement la série

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_n x^n + k_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

dans laquelle x est < 1, et dont trois coefficients consécutifs sont liés par la relation

$$(7) \qquad k_{s+1} = A_s k_s + a_s k_{s-1};$$

en outre la limite de A_s, quand s grandit indéfiniment, est moindre que l'unité ou lui est au plus égale, et la limite de a_s est zéro; alors la série est convergente.

En effet, la limite du rapport $\frac{k_{s+1}}{k_s}$ est égale à la limite τ de A_s quand s grandit indéfiniment; donc la limite du rapport d'un terme au précédent dans la série est τx, nombre < 1, et elle est convergente. Or les relations (2), (3), (4), (5), satisfaisant aux mêmes conditions que la relation (7), les séries sont convergentes tant que v et v' sont < 1, c'est-à-dire quel que soit α.

Au contraire, si v et v' étaient > 1, ces séries seraient divergentes.

Cependant pour avoir des séries bien convergentes, on préférera les formules (e') et (f') quand α sera compris entre 0 et 45 degrés, et les formules (e) et (f) quand α sera compris entre 45 et 90 degrés.

19. On voit facilement que, à partir d'un terme suffisamment éloigné, tous les termes suivants ont le même signe dans les quatre séries (e), (f), (e'), (f'); mais nous allons de plus étudier le nombre des variations de ces deux dernières. Si nous supposons d'abord $h = 0$, R et m' se réduisent à g^2, et les deux séries (e') et (f') à

$$P_2 = k'_0 \left[1 - \frac{g^2}{2} v'^2 + \frac{g^2(g^2-4)}{2.3.4} v'^4 - \frac{g^2(g^2-4)(g^2-16)}{2.3.4.5.6} v'^6 + \ldots\right],$$

$$P_1 = \frac{a'_1}{g}\left[g v' - \frac{g(g-1)}{2.3} v'^3 + \frac{g(g^2-1)(g^2-9)}{2.3.4.5} v'^5 - \ldots\right];$$

ce sont à des facteurs près les valeurs de $\cos g\alpha$ et de $\sin g\alpha$.

Si nous faisons successivement

$$g = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

le facteur entre crochets de P_2 devient

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{1.2}v'^2 - \frac{3}{1.2.3.4}v'^4 - \frac{3.15}{1.2.3.4.5.6}v'^6 - \ldots,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2v'^2,$$

$$\cos 3\alpha = 1 - \frac{3^2}{1.3}v'^2 + \frac{3^2(3^2-2^2)}{1.2.3.4}v'^4 + \frac{3^2(3^2-2^2)(4^2-3^2)}{1.2.3.4.5.6}v'^6 + \ldots,$$

$$\cos 4\alpha = 1 - \frac{4^2}{1.2}v'^2 + \frac{4^2(4^2-2^2)}{1.2.3.4},$$

. . . .

La série qui donne $\cos\alpha$ possède une seule variation et une seule racine positive en v', $v' = \sin\frac{\pi}{2}$; $\cos 2\alpha$ ne possède aussi qu'une variation et qu'une racine positive $v' = \sin\frac{\pi}{4}$; $\cos 3\alpha$ a deux variations et deux racines positives, $v' = \sin\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$: $\cos 4\alpha$ a deux variations et deux racines positives $v' = \sin\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$. Et en général la série qui donne $\cos g\alpha$ au moyen de v' possède autant de variations que l'équation $\cos g\alpha = 0$ a de racines positives en v'.

On reconnaît pareillement que la série qui exprime $\sin g\alpha$ a un nombre de variations égal au nombre de ses racines en v'.

Ainsi quand h est nul, P_1 et P_2 exprimés par v' possèdent le même nombre de variations que de racines positives, et nous allons démontrer que cette propriété subsiste pour une valeur quelconque de h.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de P_2; nous avons entre les coefficients de trois termes consécutifs de

$$P_2 = k'_0 + k'_1 v'^2 + k'_2 v'^4 + \ldots$$

la relation

$$k'_{s+1} = \frac{(4s^2 - m')k'_s - 4h^2 k'_{s-1}}{(2s+1)(2s+2)},$$

et imaginons que l'on fasse croître la quantité h. Il résulte de cette formule que pour aucune valeur de h (zéro excepté), deux coefficients consécutifs ne peuvent s'annuler. En effet, si k'_s et k'_{s+1} étaient nuls, k'_{s-1}

le serait aussi, puis pour la même raison k'_{s-2}, et ainsi de suite, de sorte que tous les termes de la série s'annuleraient.

En second lieu, si le coefficient d'un des termes s'annule pour une certaine valeur de h, les coefficients des deux termes qui l'entourent sont de signe contraire, comme on le voit par la même formule.

Il résulte de là que, tandis que h grandit, P_2 ne peut acquérir ni perdre aucune variation, et qu'il en possède par conséquent le même nombre que pour $h = 0$. Mais, comme nous l'avons démontré (n° **10**), P_2 s'annule toujours le même nombre de fois de $\alpha = 0$ à $\alpha = \frac{\pi}{2}$, quel que soit h; donc enfin l'équation

$$P_2(\nu') = 0$$

a précisément autant de racines réelles, positives et < 1, qu'elle a de variations.

20. Cette propriété permet de séparer les racines de cette équation. Considérons d'abord une équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

qui a autant de racines positives que de variations; formons la suite des dérivées de $f(x)$

$$\text{(A)} \qquad f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots,$$

qui pour $x = 0$ présente les mêmes signes que la suite des coefficients de $f(x)$; il est aisé de prouver que, tandis que l'on fait croître x, il est impossible que cette série gagne jamais de variations; mais que lorsque $f(x)$ s'annule, il se perd une variation du premier au deuxième terme. Donc si l'équation $f(x) = 0$ a autant de variations que de racines positives, comme la série (A) pour $x = 0$ a ce nombre de variations, que lorsque x grandit, elle en perd une à chaque fois que $f(x)$ s'annule, et qu'elle n'en peut gagner, elle ne peut en perdre que lorsque x passe par une racine de l'équation $f(x) = 0$, et en comptant le nombre des variations de la suite (A) pour $x = a$ et $x = b$, et faisant la différence, on a précisément le nombre des racines comprises entre a et b.

Tous ces raisonnements sont applicables à l'équation $P_2(v') = 0$, formée d'une série d'un nombre infini de termes, et on aura à examiner la suite infinie

$$(B) \qquad P_2(v'), \quad \frac{dP_2}{dv'}, \quad \frac{d^2P_2}{dv'^2}, \quad \frac{d^3P_2}{dv'^3}, \quad \ldots;$$

les deux premiers s'obtiendront par les séries

$$P_2 = k'_0 + k'_1 v'^2 + k'_2 v'^4 + \ldots,$$

$$\frac{dP_2}{dv'} = k'_1 2v' + k'_2 4v'^3 + \ldots;$$

puis on calculera les dérivées suivantes au moyen de l'équation

$$\frac{d^2P}{dv'^2}(1 - v'^2) - \frac{dP}{dv'}v' + (R - 2h^2 + 4h^2 v'^2)P = 0$$

et de celles que l'on en déduit par la différentiation.

Le nombre infini des termes de la suite (B) n'offre pas d'embarras; car on sait combien l'équation $P_2(v') = 0$ a de racines entre 0 et 1; elle en a autant que $\cos g\alpha = 0$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: c'est $\frac{g}{2}$ ou $\frac{g+1}{2}$, suivant que g est pair ou impair; $P_2(v')$ possédera autant de variations; on calculera donc seulement un nombre n de termes de la série qui donne P_2, suffisant pour y compter toutes ces variations, et il résulte des premiers principes de l'algèbre que la série (B) n'aura pas de variations au delà de ses n premiers termes quand on donnera à v' une valeur positive.

21. Tout ce que nous venons de dire de P_2 peut être répété pour P_1. Nous pouvons maintenant nous faire une idée plus précise de la constante R. Cette quantité, pour $h = 0$, se réduit au carré d'un nombre entier : elle est par conséquent positive quand h est très-petit; mais nous allons démontrer que la constante R relative à P_2 est non-seulement positive, mais aussi plus grande que $2h^2$, quel que soit h.

Nous venons d'examiner les changements dans le nombre des variations de la suite (B) quand on fait varier v' de 0 à 1; mais comme

P_1 et P_2 sont l'une une fonction impaire en v' et l'autre une fonction paire, il en résulte que la série (B) jouit de la même propriété entre -1 et 0 qu'entre 0 et 1, et par conséquent si l'on fait croître v' de -1 à $+1$, il se perd une variation seulement à chaque fois que v' passe par une racine de $P_2(v') = 0$. Pareille chose a lieu pour $P_1(v')$.

P_2 est donné par l'équation

$$(n) \qquad \frac{dP_2}{dv'^2}(1 - v'^2) = \frac{dP_2}{dv'}v' + (2h^2 - 4h^2v'^2 - R)P_2;$$

faisons-y $v' = 0$, nous avons alors $\frac{dP_2}{dv'} = 0$, et par conséquent P_2 et $\frac{d^2P_2}{dv'^2}$ sont de signe contraire; car s'ils étaient de même signe, faisons croître v' depuis une quantité très-petite négative jusqu'à une quantité très-petite positive, $\frac{dP_2}{dv'}$, en s'annulant, passera d'un signe contraire à celui de P_2 à un signe pareil, et la série perdrait deux variations, tandis qu'elle n'en doit point perdre. Donc le coefficient de P_2 est négatif, et l'on a

$$2h^2 - R < 0,$$

ou $R > 2h^2$.

Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par R' la constante R quand elle appartient à la fonction P_1, et nous allons démontrer qu'elle est $> -2h^2$ toutes les fois que le nombre entier g est > 1. En effet, $\frac{dP_1}{dv'}$ s'annule nécessairement pour une valeur de v' comprise de 0 à 1, et, pour cette valeur, P_1 et $\frac{d^2P_1}{dv'^2}$ sont de signe contraire, et puisque P_1 satisfait à l'équation (n), lorsqu'on y remplace R par R', on a

$$2h^2 - 4h^2v'^2 - R' < 0$$

ou

$$R' > 2h^2(1 - 2v'^2),$$

et à plus forte raison R' est $> -2h^2$.

Il est bon de remarquer que l'équation (n) cesse d'être applicable à la limite $v' = 1$, par cette raison que v', étant le sinus d'un angle déterminé, ne peut prendre des valeurs plus grandes que l'unité. Et en

effet, pour $\varphi' = 1$, P ou $\frac{dP}{d\alpha}$ est nul. Supposons que ce soit P, il résulte de cette équation que $\frac{dP}{d\varphi'}$ serait nul, et par suite aussi $\frac{dP}{d\alpha}$, d'après l'égalité

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{dP}{d\varphi'} \cos\alpha;$$

ce qui est impossible.

Des équations différentielles qui déterminent la fonction Q.

22 Nous savons que Q est donné par l'équation

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - 2h^2 E(2\beta)] = 0,$$

et si l'on pose

$$\rho = c\,\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}, \quad \rho' = c\,\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2},$$

et qu'on prenne ρ et ρ' pour variables, on obtient les deux équations

$$(1) \qquad \frac{d^2Q}{d\rho^2}(\rho^2 - c^2) + \frac{dQ}{d\rho}\rho + (4\lambda^2\rho^2 - R - 2h^2)Q = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2Q}{d\rho'^2}(\rho'^2 + c^2) + \frac{dQ}{d\rho'}\rho' + (4\lambda^2\rho'^2 - R + 2h^2)Q = 0.$$

Lorsqu'on fait $c = 0$ dans ces équations, elles se réduisent à une seule, relative à la membrane circulaire; les deux demi-axes ρ et ρ' d'une quelconque des ellipses homofocales à la membrane se changeant en le rayon r d'un cercle, on a

$$(3) \qquad \frac{d^2Q}{dr^2}r^2 + \frac{dQ}{dr}r + (4\lambda^2 r^2 - g^2)Q = 0,$$

équation trouvée au n° **2**. Nous avons vu que sa solution générale est la somme de deux solutions particulières, dont l'une devient infinie pour $r = 0$. Il faut s'expliquer comment la solution du cercle peut se déduire de celle de l'ellipse.

Pour cela, supposons d'abord λ nul dans les équations (1), (2) et (3);

elles deviennent, en remarquant que R se réduit à g^2 pour l'hypothèse $\lambda = 0$, qui donne $h = 0$,

$$(1') \qquad \frac{d^2Q}{d\rho^2}(\rho^2 - c^2) + \frac{dQ}{d\rho}\rho - g^2Q = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{d^2Q}{d\rho'^2}(\rho'^2 + c^2) + \frac{dQ}{d\rho'}\rho' - g^2Q = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{d^2Q}{dr^2}r^2 + \frac{dQ}{dr}r - g^2Q = 0.$$

L'intégrale générale de (3') est

$$Q = Ar^g + Br^{-g},$$

et devient infinie pour $r = 0$, c'est-à-dire au centre du cercle. Mais les intégrales des deux équations (1') et (2') sont

$$Q = A\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}\right)^g + \frac{B}{\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}\right)^g},$$

$$Q = A\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g + \frac{B}{\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g},$$

et l'on voit que la seconde partie de leur expression n'est pas infinie pour $\rho = c$ ou $\rho' = 0$, excepté dans le cas où c est nul.

Ainsi la solution générale des équations (1) et (2), quand on y fait $\lambda = 0$, renferme deux constantes arbitraires et ne devient pas infinie pour $\rho' = 0$.

Nous avons vu que le déplacement d'un point de la membrane est représenté par

$$w = Au \sin 2\lambda mt, \quad u = PQ,$$

et pour une même valeur de g, P peut s'annuler ou être maximum pour $\alpha = 0$, et a deux expressions, P_1 et P_2, qui correspondent à deux valeurs différentes de la constante R, qui deviennent seulement identiques pour $h = 0$; de là, pour u, deux expressions,

$$u = P_1Q_1, \quad u = P_2Q_2,$$

dans lesquelles Q_1 est une valeur de Q qui s'annule pour $\beta = 0$, et Q_2 une valeur qui devient maximum pour cette valeur de β. Voyons à quoi se réduisent Q_1 et Q_2 quand on y fait $\lambda = 0$.

Exprimons que

$$Q = A\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g + B\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^{-g}$$

est nul pour $\rho' = 0$, et nous aurons $\frac{B}{A} = -c^{2g}$; donc

$$Q_1 = A\left[\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g - \frac{c^{2g}}{\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g}\right];$$

et si nous exprimons que $\frac{dQ}{d\rho'}$ est nul pour $\rho' = 0$, nous avons $\frac{B}{A} = c^{2g}$; donc

$$Q_2 = A\left[\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g + \frac{c^{2g}}{\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g}\right].$$

Enfin, si l'on fait $c = 0$, les deux valeurs de Q_1 et Q_2 pour une même valeur de l'entier g sont identiques.

Ces explications étaient utiles pour faire comprendre comment la théorie de la membrane circulaire est renfermée en celle de la membrane elliptique; car il est évident que ce que nous venons de trouver lorsque λ est nul, est vrai pour une valeur quelconque de λ.

25. Revenons aux équations (1) et (2). Si nous posons

$$\frac{\rho}{c} = u,$$

nous aurons, au lieu de l'équation (1),

$$\frac{d^2Q}{du^2}(u^2 - 1) + \frac{dQ}{du} + (4h^2u^2 - R - 2h^2)Q = 0,$$

et cette équation se déduit de celle qui donne P au moyen de ν par le seul changement de P en Q et de ν en u. Or nous avons vu que P_2 est donné par la série

$$P_2 = k_0 + k_1\nu^2 + k_2\nu^4 + \ldots,$$

et P_1 par cette autre

$$P_1 = a_1 v + a_2 v^3 + a_3 v^5 + \ldots,$$

$k_0, k_1, k_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots$ ayant les valeurs calculées au nº **17**; donc les valeurs correspondantes de Q sont

$$Q_2 = k_0 + k_1 \frac{\rho^2}{c^2} + k_2 \frac{\rho^4}{c^4} + \ldots,$$

$$Q = a_1 \frac{\rho}{c} + a_2 \frac{\rho^3}{c^3} + a_3 \frac{\rho^5}{c^5} + \ldots.$$

Toutefois ces séries ne peuvent être employées; car elles ne sont jamais convergentes si ρ est $> c$; ce qui a toujours lieu dans notre problème.

Mais posons

$$\frac{\rho'}{c'} = u',$$

nous aurons au lieu de l'équation (2)

$$\frac{d^2Q}{du'^2}(u'^2 + 1) + \frac{dQ}{du'} u' + (4h^2 u'^2 - R + 2h^2) Q = 0,$$

qui se déduit de l'équation qui donne P au moyen de v' (nº **17**), en changeant v' en $u'\sqrt{-1}$. Donc Q_2 et Q_1 seront donnés par les formules

$$Q_2 = k'_0 - k'_1 \frac{\rho'^2}{c^2} + k'_2 \frac{\rho'^4}{c^4} - k'_3 \frac{\rho'^6}{c^6} + \ldots,$$

$$Q_1 = a'_1 \frac{\rho'}{c} - a'_2 \frac{\rho'^3}{c^3} + a'_3 \frac{\rho'^5}{c^5} -, \ldots.$$

Nous savons que les séries qui donnent P_1 et P_2 au moyen de v' sont convergentes tant que v' est < 1; les précédentes s'en déduisent par le changement de v' en $\frac{\rho'}{c}\sqrt{-1}$; il résulte donc du théoreme du cercle de convergence que ces séries sont convergentes, tant que ρ' est $< c$. Ces séries seront très-commodes, si l'on considère une membrane très-excentrique en sorte que ρ' soit beaucoup plus petit que c.

Lorsque ρ' sera $> c$, on pourra ordinairement obtenir Q avec assez d'approximation de la manière suivante. Posons

$$z = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}}{2} = \frac{ce^\beta}{2},$$

et en prenant z pour variable, nous aurons

$$z^2 \frac{d^2 Q}{dz^2} + z \frac{dQ}{dz} + \left[4\lambda^2 z^2 \left(1 + \frac{c^4}{16 z^4}\right) - R\right] Q = 0.$$

Or, si $\rho' = \sqrt{\rho^2 - c^2}$ est $> c$, on aura

$$\rho > c\sqrt{2}, \quad \frac{c}{z} < 2(\sqrt{2} - 1),$$

$$\frac{c^4}{16 z^4} < 17 - 12\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad < 0,03056\ldots.$$

Donc si dans l'équation différentielle précédente, on réduit le facteur de $4\lambda^2 z^2$ à l'unité, celle qui en résultera fera connaître Q en général avec une certaine approximation. Or l'équation prend alors la forme que l'on a trouvée pour le cercle

$$z^2 \frac{d^2 Q}{dz^2} + z \frac{dQ}{dz} + (4\lambda^2 z^2 - R) Q = 0,$$

et en posant $R = n^2$, on aura pour valeur approchée l'expression

$$Q = Cz^n \left[1 - \frac{(\lambda z)^2}{1(n+1)} + \frac{(\lambda z)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{(\lambda z)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right],$$

où n toutefois n'est plus un entier comme dans le cas du cercle, mais dépend de h. Au reste nous donnerons plus loin un autre moyen de développer Q.

Développements de Q_1 et Q_2.

24. Les fonctions Q et Q_1 satisfont à l'équation

$$\frac{d^2 Q}{d\beta^2} = \left[R - h^2\left(e^{2\beta} + e^{-2\beta}\right)\right] Q;$$

posons

$$R - h^2\left(e^{2\beta} + e^{-2\beta}\right) = T,$$

et formons les dérivées

$$\frac{dT}{d\beta} = -\,2h^2\left(e^{2\beta} - e^{-2\beta}\right), \quad \frac{d^2T}{d\beta^2} = -\,2^2h^2\left(e^{2\beta} + e^{-2\beta}\right), \ldots.$$

Si l'on fait $\beta = 0$, toutes les dérivées d'ordre impair s'annulent, et désignant les autres par A_2, $A_4, \ldots$, posons

$$T = A_0, \quad \frac{d^2T}{d\beta^2} = -\,2^3h^2 = A_2, \ldots, \quad \frac{d^{2i}T}{d\beta^{2i}} = -\,2^{2i+1}h^2 = A_{2i};$$

puis développons Q d'après la formule

$$Q = Q_0 + \left(\frac{dQ}{d\beta}\right)_0 \beta + \left(\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right)_0 \frac{\beta^2}{1.2} + \ldots,$$

et formons les dérivées au moyen des formules

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} = TQ, \quad \frac{d^3Q}{d\beta^3} = Q\frac{dT}{d\beta} + T\frac{dQ}{d\beta},$$

$$\frac{d^4Q}{d\beta^4} = Q\frac{d^2T}{d\beta^2} + 2\frac{dQ}{d\beta}\frac{dT}{d\beta} + T\frac{d^2Q}{d\beta^2},$$

. . . .

Occupons-nous d'abord de Q_1 ; comme il est nul pour $\beta = 0$, toutes les dérivées d'ordre pair de Q s'annulent, et les dérivées d'ordre impair ont pour valeurs, en désignant la première par B :

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)_0 = B, \quad \left(\frac{d^3Q}{d\beta^3}\right)_0 = BA_0, \quad \left(\frac{d^5Q}{d\beta^5}\right)_0 = B\left(A_0^2 + 3A_2\right),$$

$$\left(\frac{d^7Q}{d\beta^7}\right)_0 = B\left(A_0^3 + \frac{2.3 + 4.5}{1.2}A_0A_2 + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}A_4\right),$$

$$\left(\frac{d^9Q}{d\beta^9}\right)_0 = B\left(A_0^4 + \frac{2.3 + 4.5 + 6.7}{1.2}A_0^2A_2 + \frac{2.3.4.5 + 4.5.6.7}{1.2.3.4}A_0A_4 + \frac{2.3\times 6.7}{1.2\times 1.2}A_2^2 + \frac{2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.5.6}A_6\right).$$

. . . .

Indiquons maintenant la forme générale de l'expression de la dérivée $\left(\frac{d^{2n+1}Q}{d\beta^{2n+1}}\right)_0$; d'abord si on y trouve un terme qui renferme $\frac{A_k A_l \ldots A_t}{\Pi k\ \Pi l \ldots \Pi t}$ en facteur, c'est qu'on a

$$(k+2)+(l+2)+\ldots+(t+2)=2n.$$

Reste à déterminer le coefficient de $\frac{A_k A_l \ldots}{\Pi k . \Pi l \ldots}$; ce coefficient est composé de différentes parties réunies par le signe de l'addition, et on obtient l'une quelconque d'entre elles de la manière suivante.

Écrivons les nombres consécutifs

$$\text{(A)} \qquad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots,\quad 2n-1,$$

puis supposons que l'on mette dans une parenthèse k consécutifs de ces nombres, puis dans une deuxième parenthèse l autres nombres consécutifs pris parmi les nombres (A); mettons ensuite dans une troisième parenthèse m autres nombres consécutifs, et ainsi de suite. Imaginons de plus que ces parenthèses soient séparées au moins par deux des nombres (A), et toujours par un nombre pair de nombres (A); enfin faisons encore cette restriction, que si la première parenthèse à la gauche ne commence pas par le facteur 2, il se trouve avant elle un nombre pair de nombres (A). On aura l'une quelconque des parties du coefficient cherché, en multipliant entre eux les produits des nombres renfermés dans chaque parenthèse.

Passons au développement de Q_2. La dérivée première de Q_2 est nulle pour $\beta = 0$, et on reconnaît qu'il en est de même de toutes les dérivées d'ordre impair, et en représentant par D la valeur de Q_2 pour $\beta = 0$, on a pour les dérivées d'ordre pair

$$\left(\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right)_0 = A_0 D, \quad \left(\frac{d^4Q}{d\beta^4}\right)_0 = D\left(A_0 + \frac{1.2}{1.2} A_2\right),$$

$$\left(\frac{d^6Q}{d\beta^6}\right)_0 = D\left(A_0^2 + \frac{1.2+3.4}{1.2} A_0 A_2 + A_4\right),$$

$$\left(\frac{d^8Q}{d\beta^8}\right)_0 = D\left(A_0^3 + \frac{1.2+3.4+5.6}{1.2} A_0^2 A_2 + \frac{1.2.3.4+3.4.5.6}{1.2.3.4} A_0 A_4 \right.$$
$$\left. + \frac{1.2\times 5.6}{1.2\times 1.2} A_2^2 + \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5.6} A_6\right).$$

. . . .

Indiquons la forme générale de la dérivée $\left(\frac{d^{2n}Q}{d\beta^{2n}}\right)_0$. Pour que l'on y rencontre le terme

$$M\frac{A_a A_b A_c}{\Pi a . \Pi b . \Pi c \ldots},$$

$a, b, c, \ldots$ étant égaux ou inégaux, il faut qu'on ait

$$(a+2)+(b+2)+\ldots=2n;$$

il ne reste plus qu'à donner la valeur du coefficient M. A cet effet, écrivons les nombres

$$\text{(B)} \qquad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots, \quad 2n-2;$$

ce coefficient sera composé de plusieurs parties différentes entre elles, dont l'une quelconque s'obtiendra de la manière suivante. Mettons dans une parenthèse a consécutifs des nombres (B), puis dans une deuxième parenthèse b autres nombres consécutifs, et ainsi de suite. Imaginons de plus que ces parenthèses soient séparées au moins par deux nombres, et toujours par un nombre pair des nombres (B); enfin ajoutons cette restriction, que si la premiere parenthèse ne commence pas par le nombre 1, il se trouve avant elle un nombre pair de nombres (B). On aura la partie cherchée du coefficient M, en multipliant entre eux les produits des nombres renfermés dans chaque parenthese.

25. Nous pouvons développer P_1 et P_2 de la même manière que les fonctions Q_1 et Q_2.

Les séries obtenues pour Q_1 et Q_2 peuvent s'écrire en posant

$$M=R-2h^2,$$

$$Q_1=B\left[\beta+M\frac{\beta^3}{1.2.3}+(M^2-24h^2)\frac{\beta^5}{1.2.3.4.5}\right.$$
$$\left.+(M^3-104h^2M-160h^2)\frac{\beta^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\right],$$

$$Q_2=D\left[1+M\frac{\beta^2}{1.2}+(M^2-8h^2)\frac{\beta^4}{1.2.3.4}\right.$$
$$\left.+(M^3-56hM-32h^3)\frac{\beta^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\right].$$

En changeant β en αi, on a

$$\begin{aligned}
P_1 = B'\Big[\alpha - M\frac{\alpha^3}{1.2.3} + (M^2 - 24h^2)\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} \\
- (M^3 - 104h^2M - 160h^2)\frac{\alpha^7}{1.2\ldots7} + \ldots\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 = D'\Big[1 - M\frac{\alpha^2}{1.2} + (M^2 - 8h^2)\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \\
- (M^3 + 56hM - 32h^3)\frac{\alpha^6}{1.2\ldots6} + \ldots\Big].
\end{aligned}$$

La valeur de R ou de M doit être choisie de manière que P_1 et P_2 aient 2π pour période; donc les valeurs de ces deux expressions doivent rester invariables, quand on y remplace α par $\alpha + 2\pi$; un moyen très-simple de déterminer M, c'est de remarquer que P_1 doit s'annuler pour $\alpha = \pi$ comme pour $\alpha = 0$, et que P_2 doit rester le même pour ces deux valeurs de α; on a ainsi l'une des deux équations

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}
&\pi - M\frac{\pi^3}{1.2.3} + (M^2 - 24h^2)\frac{\pi^5}{1.2.3.4.5} \\
&\quad - (M^3 - 104h^2M - 160h^2)\frac{\pi^7}{1.2\ldots7} + \ldots = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned}
&1 - M\frac{\pi^2}{1.2} + (M^2 - 8h^2)\frac{\pi^4}{1.2.3.4} \\
&\quad - (M^3 - 56hM - 32h^3)\frac{\pi^6}{1.2\ldots6} + \ldots = 1.
\end{aligned}\right.$$

Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un mouvement vibratoire du premier genre donné par la formule

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt.$$

Soit $\beta = \mathfrak{G}$ l'équation du contour qui est fixe, M et h seront fournis par (a) et l'équation

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{G} + \frac{M\mathfrak{G}^3}{1.2.3} + (M^2 - 24h^2)\frac{\mathfrak{G}^5}{1.2.3.4.5} \\
&\quad + (M^3 - 104h^2M - 160h^2)\frac{\mathfrak{G}^7}{1.2\ldots7} + \ldots = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si on a surtout en vue la comparaison de la théorie avec l'expérience, on pourra procéder comme il suit. Après avoir produit expérimentalement un état vibratoire de la membrane, on notera la hauteur du son, et, par suite, la valeur de $\lambda = \frac{h}{c}$. Alors l'équation (a) ne renfermera plus que l'inconnue M, et il restera à vérifier que M et $h = \lambda c$ satisfont à (c).

Les expressions précédentes de P_2 et Q_2 permettent de reconnaître que les parties du grand axe situées entre les foyers et les sommets voisins produisent des vibrations d'amplitude maximum et la partie située entre les foyers des vibrations d'amplitude minimum. En effet, la valeur de M qui y entre est positive; car nous avons démontré (n° 21) que R est $> 2h^2$. Prenons donc sur le grand axe entre le foyer et le sommet voisin un point n pour lequel α est nul; considérons un point n' très-voisin sur l'ellipse homofocale qui passe par n; β est le même pour ces deux points et α est nul pour n, très-petit pour n'; donc le déplacement vibratoire est plus grand pour n que pour n'.

Prenons un point m sur la ligne FF' qui joint les foyers, et aussi un point m' très-voisin sur l'hyperbole homofocale qui passe par m; α est le même pour m et m', β est nul pour m, très-petit pour m'; donc la grandeur de la vibration est plus petite en m qu'en m'.

On a de nouvelles expressions de P_1 et P_2 en changeant dans les valeurs précédentes de P_1 ou P_2, suivant la parité de g (n° 14) α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, h^2 en $-h^2$ (par suite M en $R + 2h^2$), et on en conclut aisément que le petit axe de la membrane est immobile ou en maximum de vibration.

Membrane annulaire.

26. Dans les deux équations

$$\rho = c\,\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2},$$

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - 2h^2 E(2\beta)]\,Q = 0,$$

faisons

$$\beta = \varepsilon - l\,\frac{c}{2a},$$

et nous aurons les deux autres équations

$$\rho = a(e^\varepsilon + qe^{-\varepsilon}),$$
$$\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2} - [R - f^2(e^{2\varepsilon} + qe^{-2\varepsilon})]Q = 0,$$

en posant

$$2\lambda a = f, \quad \frac{c^2}{4a^2} = q,$$

et les deux dernières ont cet avantage sur les premières qu'elles s'appliquent immédiatement au cercle en y faisant $q = 0$.

Supposons que Q soit nul sur l'ellipse $\rho = \mathcal{A}$, déterminons a de manière que ε soit nul sur cette ellipse, il faudra poser

$$a + \frac{c^2}{4a} = \mathcal{A},$$

d'où

$$a = \frac{\mathcal{A}}{2} \pm \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - c^2}}{2}.$$

Imaginons une membrane en forme d'anneau dont les deux bords fixes sont des ellipses homofocales; si nous désignons par $\rho = \mathcal{A}$ le contour intérieur, la fonction Q se développe ainsi :

$$Q = \varepsilon\left(\frac{dQ}{d\varepsilon}\right)_0 + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\left(\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2}\right)_0 + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3}\right)_0 + \ldots,$$

et il reste à déterminer les expressions de ces dérivées. Quoique nous ayons ici des dérivées d'ordre pair et d'autres d'ordre impair, on peut les former identiquement comme les dérivées de Q_1 par rapport à β pour $\beta = 0$. Cependant contentons-nous d'écrire les premiers coefficients de cette série sous la forme la plus commode au calcul numérique :

$$\left(\frac{dQ}{d\varepsilon}\right)_0 = B, \quad \left(\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2}\right)_0 = 0, \quad \frac{1}{B}\left(\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3}\right)_0 = -f^2(1+q) + R,$$
$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^4Q}{d\varepsilon^4}\right)_0 = -4f^2(1-q),$$
$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^5Q}{d\varepsilon^5}\right)_0 = f^4(1+q)^2 - 2f^2(R+6)(1+q) + R^2,$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^6Q}{d\varepsilon^6}\right)_0 = 12f^4(1-q^2) - 4f^2(1-q)(3R+8),$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^7Q}{d\varepsilon^7}\right)_0 = -f^6(1+q)^3 + f^4[3R(1+q)^2 + 4(23+6q+23q^2)] \\ -f^2(1+q)(3R^2+52R+80) + R^3,$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^8Q}{d\varepsilon^8}\right)_0 = -24f^6(1-q)(1+q)^2 + 48f^4(1-q^2)(R+12) \\ -24f^2(1-q)(R^2+8R+8),$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^9Q}{d\varepsilon^9}\right)_0 = f^8(1+q)^4 - 4f^6(1+q)[R(1+q)^2 + 86 - 36q + 86q^2] \\ + f^4[6R^2(1+q)^2 + 32R(15+4q+15q^2) \\ + 16(201+10q+201q^2)] \\ -4f^2(1+q)(R^3+34R^2+160R+112) + R^4,$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^{10}Q}{d\varepsilon^{10}}\right)_0 = 40f^8(1-q)(1+q)^3 \\ -f^6(1-q)(1+q)^2\left[120R + 3200 + 640\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right] \\ + f^4(1-q^2)(120R^2+3840R+16704) \\ -f^2(1-q)(40R^3+640R^2+1984R+1024),$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^{11}Q}{d\varepsilon^{11}}\right)_0 = -f^{10}(1+q)^5 + 5f^8(1+q)^2[R(1+q)^2 + 184 - 144q + 184q^2] \\ -f^6(1+q)[10R^2(1+q)^2 + 40R(53-22q+53q^2) \\ + 36912 - 29216q + 36912q^2] \\ + f^4[10R^3(1+q)^2 + R^2(1480+400q+1480q^2) \\ + R(26896+1440q+26896q^2) \\ + 82624 + 896q + 82624q^2] \\ -f^2(1+q)(5R^4+280R^3+2656R^2+5824R+2304) + R^5.$$

Suivant que la constante R est relative à une fonction P_1 ou P_2, on a pour lemouvement vibratoire de la membrane annulaire

$$w = P_1 Q \sin 2\lambda mt$$

ou

$$w = P_2 Q \sin 2\lambda mt,$$

en donnant à Q la valeur que nous venons de calculer; puis on achève de déterminer le mouvement en calculant la quantité λ d'après la condition que Q soit nul sur le contour extérieur $\rho = A$.

27. Ainsi on a deux genres de solutions : dans l'une, les portions du grand axe situées entre les deux contours fixes sont des nœuds, et dans l'autre, sont des ventres de vibration, et les lignes nodales sont encore des ellipses et des portions d'hyperboles homofocales.

Lorsqu'il s'agit d'une membrane pleine, on a deux solutions distinctes

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt, \quad w = P_2 Q_2 \sin 2\lambda mt,$$

et Q_1 et Q_2 ont deux formes distinctes, comme P_1 et P_2. Au contraire, lorsque la membrane est annulaire, les deux fonctions Q qui s'associent à P_1 et P_2 ne diffèrent plus que par la constante R qui y entre. Il suit de là que si le nombre entier g, qui désigne le nombre des lignes nodales hyperboliques, est assez grand, et surtout si en même temps l'excentricité est assez petite, la constante R différera très-peu pour une même valeur de g dans les deux fonctions P_1 et P_2, et les deux fonctions Q qui leur sont associées seront à très-peu près identiques. Les deux états vibratoires correspondants rendront donc à très-peu près le même son, et, d'après un fait d'expérience, ils se superposeront, et l'état résultant sera représenté par la formule

$$w = (AP_1 + BP_2)\, Q \sin 2\lambda mt;$$

alors les lignes nodales hyperboliques seront données par l'équation

$$AP_1 + BP_2 = 0$$

et seront encore au nombre de g. Mais précédemment une même hyperbole fournissait des portions de ces quatre branches; maintenant une hyperbole ne fournit plus que deux portions de branches qui ont une même asymptote; car la fonction $AP_1 + BP_2$ n'est pas symétrique par rapport aux axes de l'ellipse, mais si on y change α en $\pi + \alpha$, elle reste la même ou change de signe suivant que g est pair ou impair.

On voit qu'alors le son et les lignes nodales elliptiques restant invariables, la position des lignes hyperboliques qui dépend du rapport arbitraire $\frac{B}{A}$ peut varier quoique leur nombre g ne change pas.

Il est évident que les formules précédentes s'appliquent à l'anneau circulaire en y faisant $q = 0$, $R = g^2$, et elles conviennent aussi à la membrane elliptique pleine pour le mouvement du premier genre

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt,$$

puisqu'il suffit de supposer que le contour fixe intérieur se réduit à la droite des foyers, qui est la limite des plus petites ellipses homofocales. Il faut donc faire $\mathcal{A} = c$, $a = \frac{c}{2}$, $q = 1$, et ε se réduit à β.

Des lignes nodales elliptiques.

28. Considérons les valeurs de Q_1 et de Q_2 données par l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 Q}{d\beta^2} + \left[h^2 (e^{2\beta} + e^{-2\beta}) - R\right] Q = 0,$$

dont l'une est nulle et l'autre minimum pour $\beta = 0$.

Supposons que l'on fasse croître λ et par suite $h = \lambda c$, puisque c est fixe : Q_1 et Q_2 varient, mais en conservant leur caractère à la limite $\beta = 0$. R est une fonction de h, et commençons par faire cette hypothèse que

$$\frac{dR}{dh} - 4h \quad \text{est} \quad < 0;$$

alors, à mesure que λ croîtra, le coefficient de Q dans (1) prendra des valeurs de plus en plus grandes; car de l'inégalité précédente on conclut que la dérivée de ce coefficient par rapport à h,

$$2h(e^{2\beta} + e^{-2\beta}) - \frac{dR}{dh},$$

est > 0. Donc les racines de l'équation en β

$$Q(\beta, \lambda) = 0$$

vont en diminuant de grandeur lorsque λ croît.

Désignons par $\beta = B$ le paramètre de l'ellipse de contour, sur laquelle Q est nul, l'équation

$$Q(B, \lambda) = 0$$

détermine le nombre λ. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ces racines par ordre de grandeur croissante : λ_i étant la $i^{\text{ième}}$ racine, $Q(\beta, \lambda_i)$ est l'une des valeurs de Q de notre recherche, et l'équation

$$Q(\beta, \lambda_i) = 0$$

donnera, par ses racines en β, les paramètres des lignes nodales elliptiques. Or nous allons prouver que cette équation a $i-1$ racines, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ inférieures à B, et que par conséquent les ellipses de nœud sont en nombre égal à $i-1$.

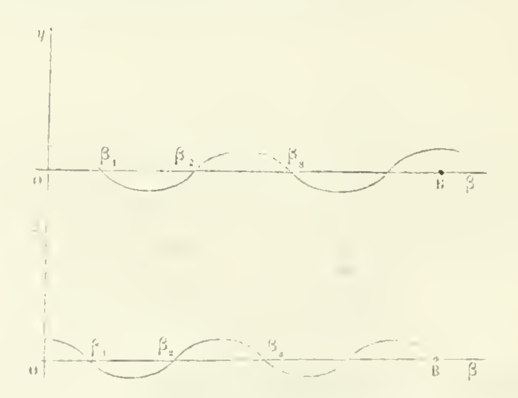
Considérons l'équation en β,

$$(a) \qquad Q(\beta, \lambda) = 0,$$

et représentons la courbe

$$y = Q(\beta, \lambda),$$

β étant pris pour abscisse et y pour l'ordonnée, qui est nulle ou maximum pour $\beta = 0$. Soit i le nombre des racines comprises entre 0 et B, et qui sont déterminées par les points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$. Faisons croître λ,



les points $\beta_1, \beta_2, \ldots$ se rapprocheront de l'origine, les sinuosités de la courbe iront en diminuant d'amplitude, et pour une valeur λ_{i+1} la courbe passera par le point B. Alors on a une valeur de $\lambda = \lambda_{i+1}$ qui

satisfait à l'équation en λ

$$(b) \qquad Q(B, \lambda) = 0;$$

et si l'on donne un nouveau petit accroissement à λ, l'équation (a) aura une nouvelle racine à la gauche de B, et aura par conséquent $i+1$ racines entre 0 et B.

Continuons à faire croître λ, les points β_1, β_2,.. se rapprochent encore de zéro, et, pour une valeur $\lambda = \lambda_{i+2}$, la courbe passera de nouveau par le point B; on aura donc encore une nouvelle valeur de λ, λ_{i+2}, qui satisfait à (b), et l'équation

$$Q(\beta, \lambda_{i+2} + \varepsilon) = 0,$$

où ε est positif et très-petit, a $i+2$ racines entre 0 et B; l'équation

$$Q(\beta, \lambda_{i+2}) = 0$$

elle-même en aura $i+2$, en comptant B. Or λ_{i+1} et λ_{i+2} sont évidemment deux racines consécutives de l'équation (b) en λ; on en conclut que si λ_{i+1} et λ_{i+2} sont deux racines consécutives de (b), l'équation en β

$$Q(\beta, \lambda_{i+2}) = 0$$

a une racine de plus que

$$Q(\beta, \lambda_{i+1}) = 0$$

entre les limites 0 et B. Ceci posé, on reconnaît aisément que $Q(\beta, \lambda_1) = 0$ n'a pas de racines entre 0 et B; donc $Q(\beta, \lambda_2) = 0$ en a une, $Q(\beta, \lambda_3) = 0$ en a deux, etc., et en général $Q(\beta, \lambda_i) = 0$ en a $i-1$.

Le nombre des lignes nodales hyperboliques restant le même, on voit que, à mesure que le son s'élève, le nombre des lignes nodales elliptiques augmente. Tout ce qui précède est fondé sur l'existence de l'inégalité

$$(c) \qquad \frac{dR}{dh} - 4h < 0.$$

Au n° 8, nous avons trouvé l'équation

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha} = \delta h\int_0^\alpha P^2\left(\frac{dR}{dh} - 4h\cos 2\alpha\right)d\alpha;$$

pour $\alpha = 0$, les deux membres sont nuls; mais si on suppose α excessivement petit, $\frac{dR}{dh} - 4h\cos 2\alpha$ ne changera pas de signe entre o et cette valeur de α; donc le premier membre aura le même signe que $\frac{dR}{dh} - 4h$.

Si cette quantité peut être positive, l'expression

$$\frac{dR}{dh} - 2h\left(e^{2\beta} + e^{-2\beta}\right)$$

le sera aussi pour des valeurs excessivement petites de β; donc en prenant B suffisamment petit, et, par suite, la membrane très-excentrique, le nombre des lignes nodales elliptiques diminuerait quand, le nombre des lignes nodales hyperboliques restant le même, la hauteur des sons augmenterait. Comme ce résultat ne paraît pas admissible, il semble que l'inégalité (c) doit toujours avoir lieu; toutefois ce qui précède ne peut en être regardé comme une démonstration rigoureuse.

Mouvement vibratoire le plus général de la membrane elliptique.

29. Nous ne nous sommes occupé jusqu'à présent que de mouvements vibratoires simples, qui sont ceux que l'on produirait le plus aisément dans l'expérience. Nous allons maintenant supposer que l'on donne à tous les points d'une membrane des vitesses initiales quelconques, et déterminer l'état vibratoire qui en résultera.

Mais auparavant faisons certaines réflexions sur les signes des coordonnées que nous employons. Comme nous l'avons dit au n° 4, où nous avons posé

$$(a)\qquad \begin{cases} x = c\,\mathrm{E}(\beta)\cos\alpha,\\ y = c\,\mathcal{E}(\beta)\sin\alpha,\end{cases}$$

lorsque l'on emploie les coordonnées α et β, on peut supposer que β

est essentiellement positif, et que α n'est susceptible de varier que de zéro à 2π, ou de $-\pi$ à $+\pi$, et malgré ces restrictions on peut représenter par ces coordonnées un point quelconque du plan.

Mais il résulte des formules (a), que si l'on donne une valeur négative à β au lieu de la donner à α, le point (x, y) reste le même, et par conséquent aussi que les coordonnées $(-\alpha, -\beta)$ représentent le même point que les coordonnées (α, β). Donc une formule qui donne le mouvement vibratoire de la membrane doit rester invariable lorsqu'on y remplace α et β par $-\alpha$ et $-\beta$: c'est ce que l'on vérifie en effet sur les deux solutions simples que nous avons trouvées

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt, \quad w = P_2 Q_2 \sin 2\lambda mt,$$

puisque P_1 et Q_1 sont des fonctions impaires de α et de β, et que P_2 et Q_2 sont des fonctions paires, et nous aurions pu associer les fonctions Q_1 et Q_2 aux fonctions P_1 et P_2, d'après cette condition (n° **15**).

Il faut toutefois remarquer que ces considérations ne seraient pas applicables à la membrane annulaire. En effet, la droite menée entre les foyers, et qui a pour équation $\beta = 0$ n'est plus située sur la surface de la membrane, et si nous avons exprimé que Q est nul pour $\beta = \beta_1$, contour intérieur et pris β_1 positif, nous ne pouvons donner à β que les valeurs positives renfermées entre celles qui conviennent aux deux contours.

Revenant au mouvement vibratoire de la membrane pleine, supposons que la vitesse initiale donnée à chaque point de la membrane soit exprimée par la formule

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = \Phi(\alpha, \beta),$$

dans laquelle $\Phi(\alpha, \beta)$ est une fonction qui s'annule sur le contour de la membrane $\beta = 6$, et qui, d'après ce que nous avons vu, reste invariable quand on y remplace α et β par $-\alpha$ et $-\beta$. On en conclut facilement que $\Phi(\alpha, \beta)$ est la somme de deux fonctions $F_1(\alpha, \beta)$, $F_2(\alpha, \beta)$, qui, ordonnées par rapport aux puissances croissantes de α et β, sont : l'une de la forme

$$F_2 = a + A\alpha^2 + B\beta^2 + C\alpha^4 + D\alpha^2\beta^2 + E\beta^4 + F\alpha^6 + G\alpha^4\beta^2 + \ldots$$

paire en α et β; et l'autre de la forme

$$F_1 = A'\alpha\beta + B'\alpha^3\beta + C'\alpha\beta^3 + D'\alpha^5\beta + E'\alpha^3\beta^3 + F'\alpha\beta^5 + G'\alpha^7\beta + \ldots,$$

impaire en α et impaire en β, mais paire par rapport à leur ensemble.

Après donc avoir posé

$$\Phi(\alpha, \beta) = F_1(\alpha, \beta) + F_2(\alpha, \beta),$$

regardons le mouvement vibratoire résultant comme la somme d'une infinité de mouvements vibratoires simples, dont nous allons nous proposer de déterminer l'amplitude. Chaque mouvement simple du premier ou du second genre donné par les formules

$$w = a P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt, \quad w = b P_2 Q_2 \sin 2\lambda mt$$

dépend d'abord d'un nombre entier g, et, ce nombre g une fois désigné, ce mouvement peut varier d'une infinité de manières par le nombre λ, qui est susceptible des valeurs croissantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$, et nous les affecterons d'un second indice qui rappelle le nombre g, et nous remplacerons les deux formules précédentes par les deux suivantes :

$$w = a P_1\left(g, \lambda_i^g\right) Q_1\left(g, \lambda_i^g\right) \sin 2\lambda_i^g mt,$$
$$w = b P_2\left(g, \lambda_i'^g\right) Q_2\left(g, \lambda_i'^g\right) \sin 2\lambda_i'^g mt.$$

Considérant ensuite un état vibratoire composé d'une infinité d'états simples, on aura

$$w = \sum a_{g, \lambda_i} P_1\left(g, \lambda_i^g\right) Q_1\left(g, \lambda_i^g\right) \sin 2\lambda_i^g mt$$
$$+ \sum b_{g, \lambda_i'} P_2\left(g, \lambda_i'^g\right) Q_2\left(g, \lambda_i'^g\right) \sin 2\lambda_i'^g mt,$$

et on en tire pour la vitesse initiale

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = 2m \sum \lambda_i^g a_{g, \lambda_i} P_1\left(g, \lambda_i^g\right) Q_1\left(g, \lambda_i^g\right)$$
$$+ 2m \sum \lambda_i'^g b_{g, \lambda_i'} P_2\left(g, \lambda_i'^g\right) Q_2\left(g, \lambda_i'^g\right),$$

expression qui doit être identifiée à $\Phi(\alpha, \beta)$; mais nous décomposerons cette égalité en les deux suivantes

$$(1) \qquad F_1(\alpha, \beta) = 2m \sum \lambda_i^g a_{g, \lambda_i} P(g, \lambda_i^g) Q(g, \lambda_i^g),$$

$$(2) \qquad F_2(\alpha, \beta) = 2m \sum \lambda_i'^g b_{g, \lambda_i'} P(g, \lambda_i'^g) Q(g, \lambda_i'^g).$$

Considérons maintenant les quatre équations

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 Q}{d\beta^2} - [R(g, \lambda c) - 2\lambda^2 c^2 E(2\beta)] Q = 0, \\ &\frac{d^2 Q'}{d\beta^2} - [R(g', \lambda' c) - 2\lambda'^2 c^2 E(2\beta)] Q' = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 P}{d\alpha^2} + [R(g, \lambda c) - 2\lambda^2 c^2 \cos 2\alpha] P = 0, \\ &\frac{d^2 P'}{d\alpha^2} + [R(g', \lambda' c) - 2\lambda'^2 c^2 \cos 2\alpha] P' = 0. \end{aligned} \right.$$

En retranchant les deux équations (b) multipliées par Q' et Q, on a

$$0 = Q' \frac{d^2 Q}{d\beta^2} - Q \frac{d^2 Q'}{d\beta^2} + [2(\lambda^2 - \lambda'^2) c^2 E(2\beta) - (R - R')] QQ';$$

intégrons de $\beta = 0$ à $\beta = \mathfrak{b}$, paramètre du contour, et nous aurons

$$\begin{aligned} 0 = &\left(Q' \frac{dQ}{d\beta} - Q \frac{dQ'}{d\beta}\right)_{\mathfrak{b}} - \left(Q' \frac{dQ}{d\beta} - Q \frac{dQ'}{d\beta}\right)_0 \\ &+ 2(\lambda^2 - \lambda'^2) c^2 \int_0^{\mathfrak{b}} E(2\beta) QQ' d\beta - (R - R') \int_0^{\mathfrak{b}} QQ' d\beta. \end{aligned}$$

Le premier terme est nul parce que Q et Q' sont nuls pour $\beta = \mathfrak{b}$; ensuite, si Q et Q' ont le caractère de Q_1, ils sont nuls pour $\beta = 0$, et s'ils ont tous deux le caractère de Q_2, leurs dérivées sont nulles pour $\beta = 0$; donc le second terme est aussi nul. On trouve de même

$$\begin{aligned} 0 = &\left(P' \frac{dP}{d\alpha} - P \frac{dP'}{d\alpha}\right)_0^{2\pi} + 2(\lambda^2 - \lambda'^2) c^2 \int_0^{2\pi} PP' \cos 2\alpha \, d\alpha \\ &- (R - R') \int_0^{2\pi} PP' d\alpha, \end{aligned}$$

dont la première partie est nulle, parce que P et P′ sont des fonctions périodiques. Ainsi on a les deux égalités

$$(d)\quad \begin{cases} (R-R')\displaystyle\int_0^{\mathfrak{b}} QQ'\,d\beta = 2(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2\int_0^{\mathfrak{b}} QQ'\,E(2\beta)\,d\beta, \\ 2(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2\displaystyle\int_0^{2\pi} PP'\cos 2\alpha\,d\alpha = (R-R')\int_0^{2\pi} PP'\,d\alpha. \end{cases}$$

Multiplions ces égalités membre à membre, et, divisant par

$$2(R-R')(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2,$$

nous obtenons

$$(e)\qquad \int_0^{\mathfrak{b}}\int_0^{2\pi}[E(2\beta)-\cos 2\alpha]\,PP'QQ'\,d\beta\,d\alpha = 0.$$

Cette égalité n'est plus démontrée si $\lambda=\lambda'$ ou si $R=R'$; elle est cependant encore exacte, car, si $\lambda=\lambda'$, on déduira des équations (d)

$$\int_0^{\mathfrak{b}} QQ'\,d\beta = 0,\qquad \int_0^{2\pi} PP'\,d\alpha = 0;$$

donc les deux parties de l'intégrale (e) sont nulles Si $R'=R$, on voit encore que les deux égalités (d) entraînent (e).

Multiplions les deux membres de l'égalité (1) par

$$P_1\left(g,\lambda_i^g\right)Q_1\left(g,\lambda_i^g\right)[E(2\beta)-\cos 2\alpha]\,d\alpha\,d\beta,$$

et intégrons, par rapport à α, de 0 à 2π, et, par rapport à β, de 0 à $\mathfrak{b}$: tous les termes disparaîtront dans le second membre d'après (e), excepté celui qui a pour coefficient a_{g,λ_i} qui se trouve déterminé. On a de même b_{g,λ_i} au moyen de (2).

On a un calcul analogue pour la membrane annulaire fixée entre deux ellipses homofocales; il serait superflu d'y insister, et même nous n'avons fait le calcul précédent que parce qu'il exigeait des considérations relatives aux signes de α et β utiles à remarquer.

Pour revenir à ces signes, imaginons encore que l'on ait à chercher

le mouvement d'une membrane elliptique dont on supprime les deux portions coupées par une hyperbole homofocale, et supposons tout le contour fixé. On aura de nouveau un mouvement vibratoire simple représenté par la formule

$$w = \mathrm{PQ} \sin 2\lambda\, mt;$$

mais P n'est plus une fonction périodique de α. On ne doit faire varier α qu'entre les limites α_1 et $\pi - \alpha_1$ relatives à l'hyperbole du contour, et l'on fera varier β entre les deux limites -6 et $+6$ relatives aux deux arcs d'ellipse de la périphérie de la membrane.

THÉORÈME

Sur le tautochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement;

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

On connaît depuis Huyghens (*De Horologio oscillatorio,* P. II, prop. 25) le tautochronisme rigoureux de la cycloïde pour un point pesant. Newton étendit cette proposition (*Principes,* liv. II, prop. 26) au cas où l'on joindrait à la pesanteur la résistance d'un milieu en raison de la vitesse. Plus tard Necker montra (*Mémoires des Savants étrangers,* 1763, t. IV, p. 96) que la même propriété subsiste lorsqu'on a égard au frottement. Le tautochronisme a lieu alors par rapport au point où la tangente est inclinée sous l'angle de frottement. Ajoutons enfin que les trois forces peuvent être réunies ensemble sans troubler l'isochronisme. Le P. Jullien a montré de plus (*Problèmes de Mécanique,* t. I, p. 393) que cette combinaison constituait la solution la plus étendue renfermée dans la formule générale de Lagrange pour le tautochronisme [*] lorsqu'on envisage ensemble la pesanteur, le frottement et une résistance qui dépende de la vitesse d'une manière indéterminée.

D'un autre côté, Newton avait déjà reconnu (*Principes,* liv. I, prop. 52) que l'épicycloïde possède elle-même la propriété du tautochronisme lorsque le mobile est sollicité par le centre du cercle fixe en raison de la distance. Mais, à ma connaissance, le parallèle en est

[*] Cette formule dont je parlerai plus loin a été présentée par son auteur comme renfermant tous les cas possibles de tautochronisme; c'était à tort, et M. Bertrand a montré (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1847, t. XII, p. 121) qu'elle est loin d'être aussi générale; mais elle n'en conserve pas moins un grand intérêt.

resté là. J'ai cherché à le compléter, et je suis arrivé au théorème suivant :

L'épicycloïde est encore tautochrone pour des forces centrales attractives ou répulsives proportionnelles à la distance, lorsqu'on a égard au frottement. Le point d'isochronisme est alors celui dont le rayon vecteur fait avec la normale l'angle de frottement. Ce tautochronisme n'est pas troublé quand on introduit, en outre, une résistance proportionnelle à la vitesse.

Pour le démontrer, formons l'expression de la force tangentielle en représentant par kr l'action attractive ou répulsive suivant le signe de k, f le coefficient de frottement et $\varphi(v)$ la résistance que nous laisserons indéterminée jusqu'à nouvel ordre :

$$S = kr\cos\mu - \varphi(v) - f\left(\frac{v^2}{\rho} + kr\sin\mu\right),$$

μ désignant l'angle du rayon vecteur avec la courbe. Or on trouve, en prenant l'arc pour variable indépendante,

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds},$$

$$\sin\mu = \sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}},$$

et

$$\rho = \frac{r\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}}{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}.$$

L'expression de la force tangentielle devient par là

$$(1) \quad S = kr\frac{dr}{ds} - \varphi(v) - f\left(v^2\frac{1-\frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}} + kr\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}\right).$$

La formule générale de Lagrange (*Mémoires de Berlin*, 1765) donne,

pour la force tangentielle capable de tautochronisme,

$$(2) \qquad S = v\psi\left(\frac{v}{\xi}\right) - \frac{v^2}{\xi}\frac{d\xi}{ds},$$

ξ étant une fonction arbitraire de s et ψ une expression quelconque formée avec $\frac{v}{\xi}$. Pour avoir la solution la plus générale renfermée dans cette formule pour les hypothèses précédentes, il suffit de disposer de ces deux arbitraires et de la fonction r qui définit la courbe inconnue de manière à identifier les deux expressions. Je suivrai pour cela une marche analogue à celle qui a été employée par M. Bertrand et depuis par le P. Jullien.

L'expression (1) satisfait visiblement au caractère

$$\frac{d^4 S}{dv^3\,ds} = 0.$$

Imposons donc cette condition à la formule (2) : il vient ainsi

$$\frac{v^2}{\xi^2}\psi^{\text{IV}}\left(\frac{v}{\xi}\right) + 6\frac{v}{\xi}\psi'''\left(\frac{v}{\xi}\right) + 6\psi''\left(\frac{v}{\xi}\right) = 0.$$

Cette équation a pour intégrale avec quatre constantes arbitraires A, B, C, D :

$$\psi\left(\frac{v}{\xi}\right) = A\frac{\xi}{v} - B + \frac{C}{A}\frac{v}{\xi} + D\log\frac{v}{\xi}.$$

Des lors la relation (2) prend la forme plus explicite

$$(3) \qquad S = A\xi - Bv + \frac{v^2}{\xi}\left(\frac{C}{A} - \frac{d\xi}{ds}\right) + Dv\log\frac{v}{\xi}.$$

Nous pouvons maintenant identifier les expressions (1) et (3). En premier lieu, le terme $Dv\log\xi$ nous présente v au premier degré avec un coefficient qui contient s, ce qui n'existe pas dans la formule (1) et nous oblige à faire $D = 0$. La fonction (3) se trouve par là réduite à ses trois premiers termes, l'un indépendant de v, le second de s, le troisième les renfermant tous les deux. En envisageant dans l'expression (1) les

trois parties correspondantes, nous aurons pour les fonctions de v seul :

$$\mathrm{B}v = \varphi(v),$$

pour les termes qui ne renferment que s :

$$\mathrm{A}\,\xi = kr\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right),$$

et enfin, pour la partie qui les contient tous les deux, v^2 disparaissant de lui-même :

$$\frac{1}{\xi}\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - \frac{d\xi}{ds}\right) = f\,\frac{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}.$$

La première équation montre que la seule résistance admissible est proportionnelle à la vitesse. La seconde fournit la valeur de ξ, et, en la reportant dans la troisième, nous obtenons l'équation différentielle de la trajectoire :

$$\frac{\frac{\mathrm{C}}{k} - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{f\frac{dr}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}\left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)}{r\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right)} = f\,\frac{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}},$$

ce qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\left(\frac{\mathrm{C}}{k} - 1\right) + \left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left[1 + \frac{f\frac{dr}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}} - \frac{f\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}\right] = 0.$$

ou encore

$$\left(\frac{\mathrm{C}}{k} - 1\right) + \left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)(1 + f^2) = 0,$$

et enfin

$$\frac{dr^2}{ds^2} + r\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{\frac{\mathrm{C}}{k} + f^2}{1 + f^2}.$$

Cette forme que l'on pourrait facilement intégrer entre r et s, et même ensuite en coordonnées polaires entre r et θ, va nous suffire pour conclure sans qu'il soit nécessaire de développer l'intégration.

On voit, en effet, que le coefficient de résistance B a complétement disparu, et que l'existence ou la suppression du frottement n'influencent que la valeur de la constante qui seule renferme le coefficient f. Or, C est arbitraire, ce qui montre que *la tautochrone des forces centrales proportionnelles à la distance est la même avec ou sans frottement, comme avec ou sans résistance proportionnelle à la vitesse.*

Cette courbe a d'ailleurs été déjà déterminée pour le cas où l'on n'a ni frottement ni résistance par M. Puiseux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1844, t. IX, p. 415), qui a obtenu les résultats suivants : si la force est répulsive, la tautochrone est toujours une épicycloïde extérieure; si elle est attractive, la courbe peut, suivant les valeurs respectives du coefficient d'attraction et du temps d'isochronisme, être une épicycloïde intérieure ou une certaine spirale qui a la propriété d'être semblable à la développée de sa développée.

Il reste à connaître l'extrémité commune des arcs isochrones. Remarquons pour cela qu'elle ne saurait se trouver que dans une position d'équilibre, puisqu'une oscillation infiniment petite doit exiger un temps fini pour se produire dans ses environs. *Ce sera donc, dans le cas actuel, au point où la force, c'est-à-dire le rayon vecteur, fait avec la normale l'angle de frottement.*

On peut se demander si le tautochronisme subsistera encore pour le mouvement en sens contraire, lorsqu'on imprimera au mobile à partir de ce point diverses impulsions initiales. Cette réciprocité, évidente dans le cas des liaisons théoriques, doit être constatée à part dans les questions de frottement. Il suffirait d'ailleurs pour cela de changer dans le calcul les signes de f et de B. Or celui-ci a disparu, et l'autre ne figure qu'au carré dans la dernière équation. Les conclusions resteront donc les mêmes, et l'on voit que *l'isochronisme a encore lieu pour le mouvement inverse.*

MÉMOIRE

SUR LES

ONDES DANS LES MILIEUX ISOTROPES DÉFORMÉS;

PAR M. BOUSSINESQ.

Je me propose d'exposer ici les idées contenues en germe dans un article présenté à l'Académie des Sciences le 22 juillet 1867, et qui est inséré au compte rendu de la séance de ce jour [*]. Je considère un corps primitivement isotrope, mais qui a cessé de l'être par suite de pressions ou de tractions inégales exercées sur lui dans les divers sens. J'obtiens les formules de ses forces élastiques, en m'appuyant seulement sur l'hypothèse, admise par tout le monde, que ces forces peuvent être exprimées en fonction linéaire des dérivées partielles des déplacements. Dans le cas où le milieu, après sa déformation, n'est soumis à aucune action extérieure, les formules auxquelles j'arrive sont semblables à celles que M. de Saint-Venant a données comme conséquence d'une distribution dite ellipsoïdale des élasticités autour de chaque point, et qu'il a reconnu, dans l'hypothèse de l'égalité de certains coefficients, regardée par lui comme conforme à la réalité, être communes aux milieux isotropes inégalement comprimés [**]. Il est arrivé à ce dernier résultat, en admettant que l'action réciproque de deux molécules est simplement fonction de leur distance.

Le corps étant supposé homogène, je cherche ensuite les équations

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 167.

[**] Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un corps solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. VIII, 1863; *voir* aux nos 13 et 16 de ce Mémoire.

de ses mouvements et les propriétés des ondes planes qui s'y propagent. Ces ondes sont quasi transversales ou quasi longitudinales, c'est-à-dire que les vibrations s'y font presque parallèlement ou presque perpendiculairement aux plans des ondes. Toutefois, pour certaines relations peu probables entre les coefficients, les ondes sont rigoureusement transversales, ou rigoureusement longitudinales.

Le milieu peut propager dans chaque direction deux systèmes d'ondes quasi transversales, ayant deux vitesses inégales de propagation, et correspondant à des vibrations polarisées à angle droit. Dans un cas particulier, la surface des ondes est celle de Fresnel, avec des vibrations dirigées, comme le suppose Fresnel dans sa théorie de la double réfraction, suivant la projection du rayon sur le plan tangent : c'est le cas étudié par M. Briot [*], qui l'obtient en supposant que deux molécules d'éther se repoussent en raison inverse de la sixième puissance de la distance. Dans un autre cas, celui où la pression extérieure exercée sur le milieu est nulle ou est la même dans tous les sens, la surface de l'onde est encore celle de Fresnel, mais les vibrations se font perpendiculairement à la projection du rayon sur le plan tangent. Ces lois seraient celles de la double réfraction, d'après MM. Mac-Cullagh et Newmann. Cauchy, en 1830, et M. de Saint-Venant, dans son travail récent cité plus haut, y sont arrivés également.

J'étudie ensuite les vibrations quasi longitudinales, et je démontre que, dans le cas où le milieu n'est soumis qu'à une action extérieure constante, et peut propager dans tous les sens des ondes rigoureusement transversales et des ondes rigoureusement longitudinales, ces dernières ont une vitesse constante quelle que soit leur direction. Une telle propriété semble ne pouvoir appartenir qu'aux milieux physiquement isotropes. Ce résultat s'ajouterait donc aux considérations développées par M. de Saint-Venant, aux n^{os} **17**, **18**, **19**, du même Mémoire, pour prouver que les vibrations ne sont rigoureusement parallèles ou perpendiculaires aux ondes que dans les milieux isotropes.

[**] *Essais sur la Théorie mathématique de la lumière*, liv. II, chap. III et IV.

§ I. — *Forces élastiques.*

Supposons qu'un corps isotrope, homogène ou hétérogène, soit soumis à des actions mécaniques, telles que des pressions ou des tractions, capables de le déformer très-peu. Ses molécules prendront un nouvel équilibre, et il ne sera généralement plus isotrope dans son nouvel état. Si même il n'est pas parfaitement élastique, les positions d'équilibre des molécules changeront lentement, sans que les actions extérieures auxquelles il est soumis varient, et le corps passera par une série d'états distincts, jusqu'à ce qu'il en rencontre un plus stable, approprié aux nouvelles conditions dans lesquelles il se trouve. A plus forte raison les positions d'équilibre des molécules et la constitution du corps changeront-elles continuellement, si, comme nous le supposerons dans ce paragraphe, les actions déformatrices varient d'un instant à l'autre et d'ailleurs ne cessent jamais d'être appliquées. Ces positions seront à chaque instant celles dans lesquelles les molécules resteraient en repos, si on les y disposait sans vitesse initiale, et si la constitution du corps et les actions extérieures qu'il supporte continuaient à être ce qu'elles sont au moment considéré. On peut admettre comme évident qu'à chaque instant les molécules les occuperont à très-peu près, excepté pendant les moments très-courts et tout exceptionnels où les actions déformatrices varieraient brusquement.

Nous savons qu'il existera en chaque point, à un instant quelconque, trois éléments plans rectangulaires, sur lesquels les actions exercées seront normales [*]. Si nous considérons une portion très-petite du corps, ces éléments plans auront à très-peu près même direction, et les forces qui les sollicitent même grandeur, dans toute son étendue. Celles-ci se composent en général de deux parties : l'une K, commune aux trois éléments plans, et qui existait antérieurement aux modifications produites; la deuxième correspondante à ces modifications, et que nous désignerons, pour les mêmes éléments plans, respectivement par A, B, C. Nous admettrons que, dans la portion considérée du corps, les éléments

[*] Lamé, *Leçons sur l'Élasticité*, § 22.

plans normalement pressés ou tirés par les actions déformatrices gardent la même direction à tous les instants consécutifs, et que ces forces A, B, C varient avec le temps de manière à conserver entre elles les mêmes rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$. Si nous désignons par a, b, c trois nombres constants, proportionnels à A, B, C, et du même ordre de petitesse que les dilatations linéaires éprouvées par le corps pendant sa déformation, les rapports $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{C}{c}$ seront égaux entre eux, et à une même fonction F du temps t. La fonction F (t) peut d'ailleurs être quelconque : elle se réduit à une constante, si les actions déformatrices restent les mêmes toujours; elle sera nulle ou constante à partir d'une certaine valeur de t, si A, B, C deviennent elles-mêmes nulles ou constantes au bout d'un certain temps. Quoi qu'il en soit, cette fonction étant supposée connue, la constitution du corps, à chaque instant, ne dépendra plus que de a, b, c. En effet, concevons plusieurs corps exactement pareils au proposé, soumis à des actions mécaniques analogues, et pour lesquels les rapports $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$ soient la même fonction du temps, sans que a, b, c s'y trouvent les mêmes. Il est évident que leurs constitutions, au même moment, ne peuvent différer qu'à raison des valeurs différentes de a, b, c; puisque, si a, b, c y étaient respectivement égales, les actions déformatrices A, B, C auraient aussi été les mêmes à chaque instant dans les deux corps, et ne pourraient qu'y avoir produit les mêmes effets.

Concevons qu'à un moment donné les molécules éprouvent, par rapport à leurs positions actuelles d'équilibre, des déplacements très-petits, compris dans les limites d'élasticité du corps; les forces élastiques développées par ces déplacements seront fonctions de a, b, c : nous nous proposons de chercher leur expression, en négligeant les termes du second ordre de petitesse par rapport à a, b, c.

Adoptons un système de plans coordonnés des yz, des zx et des xy, parallèles aux positions d'équilibre des éléments sur lesquels s'exercent les actions $K+A$, $K+B$, $K+C$; nous appellerons les axes ainsi obtenus *axes d'élasticité*. Soient x, y, z les coordonnées actuelles d'équilibre d'une molécule M, appartenant à la petite portion considérée du corps; u, v, w les déplacements suivant les axes de la même

molécule, par rapport à la position d'équilibre. Appelons avec M. Lamé (*Leçons sur l'Élasticité*, § 8), N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 les forces élastiques principales, c'est-à-dire les composantes, suivant les axes, des actions exercées sur l'unité superficielle des trois éléments plans passant par M, et actuellement parallèles aux plans coordonnés. On sait que ces forces dépendent des dérivées partielles de u, v, w par rapport à x, y, z, et que, pour des valeurs assez petites des dérivées, elles en sont fonctions linéaires.

Cela posé, je dis que la constitution du corps, primitivement isotrope, est restée symétrique par rapport aux plans coordonnés, c'est-à-dire que si, gardant deux quelconques des axes, on change le sens du troisième, par exemple le sens de celui des x par la transformation de x en $-x$ et de u en $-u$, les formules des forces élastiques principales seront les mêmes dans le nouveau système d'axes que dans le premier. En effet, les actions normales A, B, C, causes uniques de la déformation du corps et de l'altération de son isotropie, s'exercent également sur les deux faces de tout élément parallèle aux plans coordonnés, et les circonstances sont les mêmes par rapport aux deux systèmes considérés d'axes. Or, si l'on change le sens de celui des x, la nouvelle force principale N_1 sera celle qui est exercée sur le même élément parallèle aux yz, mais du côté des x d'abord négatifs; elle sera égale à la force de même nom dans le premier système. On verra pareillement que les forces N_2, N_3, T_1 restent les mêmes, et que T_2 et T_3 doivent être changées en $-T_2$, $-T_3$. Donc les transformations simultanées de x en $-x$ et de u en $-u$ doivent laisser invariables N_1, N_2, N_3, T_1, et faire changer de signe T_2 et T_3. De même les transformations simultanées de y en $-y$ et de v en $-v$ doivent laisser invariables N_2, N_3, N_1, T_2 et changer de signe T_3, T_1. Enfin les changements de z en $-z$ et de w en $-w$, ne changent pas N_3, N_1, N_2, T_3, et transforment T_1, T_2 en $-T_1$, $-T_2$. Il suit de là que l'expression de N_1 se réduit à $K + A$, suivi de trois termes en $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, et que celle de T_1 contient seulement les deux termes en $\frac{dv}{dz}$ et $\frac{dw}{dy}$.

Le coefficient de chacun de ces termes comprend deux parties. La première est identique à la valeur du coefficient dans le milieu iso-

trope primitif. La deuxième, correspondante à la petite altération éprouvée, est peu considérable par rapport à la première; elle est une fonction des petites quantités a, b, c, et s'annule avec celles-ci. Comme nous n'avons pas de raison spéciale pour supposer les dérivées partielles de cette fonction nulles ou infinies quand $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, nous la développerons par la série de Maclaurin, et, vu la petitesse de a, b, c, nous pourrons nous arrêter aux termes du premier degré. Ainsi la deuxième partie du coefficient sera une fonction linéaire de a, b, c.

D'ailleurs, le milieu primitif étant isotrope, N_1 et T_1 garderont les mêmes expressions, si les deux axes des y et des z échangent leurs noms, c'est-à-dire si, x, u et a ne changeant pas, on permute à la fois y et z, v et w, b et c. Occupons-nous d'abord de N_1. La permutation indiquée change le terme qui contient $\frac{dv}{dy}$ en celui qui contient $\frac{dw}{dz}$, et réciproquement. Donc : 1° la partie de ces termes indépendante de a, b, c, a un même coefficient l; 2° le coefficient de $c\frac{dv}{dy}$ est le même que celui de $b\frac{dw}{dz}$: nous le désignerons par l'; 3° le coefficient de $b\frac{dv}{dy}$ est égal à celui de $c\frac{dw}{dz}$, et nous pouvons le représenter, quel qu'il soit, par $l' + n$; 4° enfin les coefficients de $a\frac{dv}{dy}$ et de $a\frac{dw}{dz}$ sont égaux, et nous les désignerons par $l' + l''$. L'ensemble des termes en $\frac{dv}{dy}$ et $\frac{dw}{dz}$ sera ainsi exprimé par

$$[l + l'(a + b + c) + l''a]\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + n\left(b\frac{dv}{dy} + c\frac{dw}{dz}\right).$$

On verra de même que, dans le terme en $\frac{du}{dx}$, b et c ont un coefficient égal, de manière qu'en désignant par m_1, s, s' trois nouveaux coefficients, on peut écrire ce terme

$$[l + l'(a + b + c) + l''a + na + 2m_1 + 2s(a + b + c) + 2s'a]\frac{du}{dx}.$$

Pareillement, dans T_1, la permutation indiquée change le terme qui contient $\frac{dv}{dz}$ en celui qui contient $\frac{dw}{dy}$. Donc : 1° la partie de ces termes

indépendante de a, b, c a un même coefficient m; 2° les coefficients de $b\frac{dv}{dz}$ et de $c\frac{dw}{dy}$ sont égaux : nous les désignerons par m'; 3° ceux de $c\frac{dv}{dz}$ et de $b\frac{dw}{dy}$ le sont encore, et peuvent être représentés par $m'+p$; 4° enfin nous appellerons $m'+m''$ ceux de $a\frac{dv}{dz}$ et de $a\frac{dw}{dy}\cdot$

Représentons, afin d'abréger, par $\mathbf{S}$ la somme de trois termes analogues, dont le premier sera écrit immédiatement après ce signe; par exemple $a+b+c$ par $\mathbf{S}a$, $a\frac{du}{dx}+b\frac{dv}{dy}+c\frac{dw}{dz}$ par $\mathbf{S}a\frac{du}{dx}$, et la dilatation $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$ par $\mathbf{S}\frac{du}{dx}$ ou simplement par θ. D'après ce qui précède, N_1 et T_1 auront la forme

$$(1)\quad \begin{cases} N_1 = K + A + (l + l'\mathbf{S}a + l''a)\theta + n\mathbf{S}a\frac{du}{dx} \\ \qquad + 2(m_1 + s\mathbf{S}a + s'a)\frac{du}{dx}, \\ T_1 = (m + m'\mathbf{S}a + m''a)\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + p\left(c\frac{dv}{dz} + b\frac{dw}{dy}\right)\cdot \end{cases}$$

On déduira évidemment de ces deux formules N_2 et T_2, N_3 et T_3, en effectuant respectivement une ou deux permutations circulaires sur x, y, z; u, v, w; A, B, C; a, b, c.

Si les deux quantités a, b, et, par suite, les actions déformatrices A, B sont égales, il est aisé de voir, par les formules générales déduites de la considération du tétraèdre de Cauchy [*], que les actions exercées, dans l'état d'équilibre du corps, sur tout élément plan parallèle aux z, seront égales à K + A, et que, par conséquent, le milieu sera

[*] Ces formules sont (voir *Leçons* de M. Lamé, § 9)

$$X = N_1 \cos\alpha + T_3\cos\beta + T_2\cos\gamma,$$
$$Y = T_3\cos\alpha + N_2\cos\beta + T_1\cos\gamma,$$
$$Z = T_2\cos\alpha + T_1\cos\beta + N_3\cos\gamma;$$

α, β, γ représentent les angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à un élément plan quelconque passant par la molécule M; X, Y, Z désignent les compo-

resté isotrope autour de l'axe des z. Donc, dans le cas $a = b$, on peut faire tourner d'un angle très-petit ι, autour de l'axe des z, le système des deux autres axes, sans changer l'expression des forces élastiques principales en fonction des déplacements. Appelons x', y', z' les coordonnées d'équilibre de M dans le nouveau système d'axes infiniment voisin du premier, u', v', w' les déplacements de M dans le même système. Nous aurons les formules de transformation

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d}{dx} = \dfrac{d}{dx'} - \iota\dfrac{d}{dy'}, & \dfrac{d}{dy} = \dfrac{d}{dy'} + \iota\dfrac{d}{dx'}, & \dfrac{d}{dz} = \dfrac{d}{dz'}; \\ u = u' - \iota v', & v = v' + \iota u', & w = w'. \end{array}\right.$$

D'autre part, appelons N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 les forces principales relatives aux nouveaux axes. Les formules de la Note précédente, ou plus directement celles qu'établit M. Lamé au § 18 de ses *Leçons*, donneront

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} N'_1 = N_1 + 2\iota T_3, & N'_2 = N_2 - 2\iota T_3, & N'_3 = N_3; \\ T'_1 = T_1 - \iota T_2, & T'_2 = T_2 + \iota T_1, & T'_3 = T_3 - \iota(N_1 - N_2). \end{array}\right.$$

Si nous substituons dans ces formules, à N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, leurs expressions (1) en $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, puis, à ces dérivées, leurs valeurs en $\dfrac{d(u', v', w')}{d(x', y', z')}$, fournies par (2), les termes qui contiendront ι devront s'annuler quelles que soient ces dernières dérivées ainsi que a et c, puisque les forces élastiques doivent avoir la même expression dans le nouveau système que dans le premier. On obtiendra ainsi les trois relations

$$(4)\quad m_1 = m, \quad s = m' + m'', \quad s' = p - 2m''.$$

---

santes, suivant les mêmes axes, de la force élastique rapportée à l'unité de surface, qui est exercée sur cet élément plan du côté où l'on a mené la normale.

Dans l'état d'équilibre du milieu considéré, on a $N_1 = N_2 = K + A$, $T_1 = T_2 = T_3 = 0$. Pour tout élément plan parallèle à l'axe des z, $\cos\gamma$ est nul, et, par suite, il vient

$$X = (K + A)\cos\alpha, \quad Y = (K + A)\cos\beta, \quad Z = 0.$$

La force élastique est bien normale, puisque ses composantes X, Y, Z sont proportionnelles à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, 0; de plus sa valeur est $K + A$.

Telles sont les conditions, non pas pour que le milieu soit isotrope autour de l'axe des z, mais pour que cette isotropie partielle résulte de l'égalité des deux quantités a, b. Elles doivent donc être vérifiées dans les formules (1).

Enfin, nous savons qu'un déplacement d'ensemble quelconque donné à un corps ne fait pas varier la force exercée sur tout élément plan lié au corps. Or tout mouvement d'ensemble infiniment petit se compose d'une translation, qui laisse invariables les dérivées $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, et de trois rotations infiniment petites autour des trois axes coordonnés. Il faut donc qu'une simple rotation du milieu autour de chacun des trois axes laisse invariable la force exercée sur un élément plan quelconque. Par exemple, une petite rotation ω autour de l'axe des z, laquelle correspond à $u = -\omega y$, $v = \omega x$, $w = 0$, devra laisser égale à $K + A$ et normale, l'action exercée sur l'élément primitivement perpendiculaire à l'axe des x. Cette rotation donne, d'après les formules (1),

$$(4\ bis)\qquad \begin{cases} N_1 = K + A, \quad N_2 = K + B, \quad N_3 = K + C, \\ T_1 = T_2 = 0, \quad T_3 = p(a - b)\,\omega. \end{cases}$$

La normale à l'élément qui était primitivement perpendiculaire à l'axe des x, fait actuellement, avec les trois axes fixes des x, y, z, des angles qui ont pour cosinus 1, ω, 0. Les composantes, suivant les mêmes axes, de la force élastique exercée sur cet élément, seront, d'après les formules (4 *bis*), et d'après celles de la note précédente,

$$K + A, \quad p(a - b)\,\omega + \omega(K + B), \quad 0.$$

Pour qu'elle soit restée normale et vaille $K + A$, il faudra que ces trois composantes soient respectivement égales à

$$K + A, \quad (K + A)\,\omega, \quad 0.$$

L'égalité des secondes donne

$$A - B = p(a - b),$$

et, comme $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$, il vient

$$(5)\qquad A = pa; \quad \text{on aura de même} \quad B = pb,\ C = pc.$$

Avec ces valeurs de A, B, C, une simple rotation du milieu ne fait naître aucune force élastique sur les trois éléments superficiels primitivement perpendiculaires aux axes, ni par suite sur aucun élément plan.

Les formules définitives des forces élastiques sont donc

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} N_1 &= K + pa + (l + l'\mathbf{S}a + l''a)\theta + n\mathbf{S}a\frac{du}{dx} \\ &\quad + 2[m + m'\mathbf{S}a + m''(b + c - a) + pa]\frac{du}{dx}, \\ T_1 &= (m + m'\mathbf{S}a + m''a)\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + p\left(c\frac{dv}{dz} + b\frac{dw}{dy}\right); \end{aligned}\right.$$

d'où se déduisent N_2 et T_2, N_3 et T_3.

Les coefficients p, l', l'', n, m', m'' seront généralement fonctions de t, puisque nous supposons les actions déformatrices A, B, C toujours agissantes et variables d'un instant à l'autre. Le cas le plus intéressant à considérer est celui où ces actions deviennent constantes au bout d'un certain temps, et ne cessent pas ensuite de l'être; dans ce cas, le milieu ne tardera pas à acquérir une constitution permanente, et p, l', l'', n, m', m'' garderont désormais les mêmes valeurs. Si en particulier les actions déformatrices sont supprimées après avoir agi quelque temps, on aura, dans l'état moléculaire permanent qui suivra cette suppression, $A = B = C = 0$ ou $p = 0$, mais les autres coefficients ci-dessus garderont des valeurs finies; ils ne seraient nuls que si le corps se trouvait revenu à sa constitution primitive.

Notre analyse laisse indéterminés tous les coefficients qui entrent dans les formules (6); mais des considérations d'une autre espèce rendent extrêmement probable, entre trois de ces coefficients, la relation

$$(7)\qquad l'' = n - p \quad [*].$$

[*] En effet, si l'on s'appuie sur le principe, universellement admis, qu'il est impossible de créer de toutes pièces du travail, on peut réduire les expressions des forces

§ II. — *Équations des mouvements. — Ondes planes.*

Si le corps était et reste homogène, les axes d'élasticité, les coefficients et les quantités a, b, c seront les mêmes dans toute son étendue. Alors la première équation des petits mouvements, en appelant δ la densité, sera

$$\delta \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}.$$

élastiques, dans tout milieu mécaniquement symétrique par rapport aux trois plans coordonnés, et quand il y a trois actions normales $K + A$, $K + B$, $K + C$, antérieures aux déplacements, à la forme

$$(\alpha)\quad \begin{cases} N_1 = K + A + (a + K + A)\dfrac{du}{dx} + (f' - K - A)\dfrac{dv}{dy} + (e' - K - A)\dfrac{dw}{dz}, \\ N_2 = K + B + (b + K + B)\dfrac{dv}{dy} + (d' - K - B)\dfrac{dw}{dz} + (f' - K - B)\dfrac{du}{dx}, \\ N_3 = K + C + (c + K + C)\dfrac{dw}{dz} + (e' - K - C)\dfrac{du}{dx} + (d' - K - C)\dfrac{dv}{dy}; \\ T_1 = (d + K + C)\dfrac{dv}{dz} + (d + K + B)\dfrac{dw}{dy}, \\ T_2 = (e + K + A)\dfrac{dw}{dx} + (e + K + C)\dfrac{du}{dz}, \\ T_3 = (f + K + B)\dfrac{du}{dy} + (f + K + A)\dfrac{dv}{dx}. \end{cases}$$

(*Voir* Mémoire déjà cité de M. de Saint-Venant, formules 10, au n° 5.)

Il est aisé d'identifier ces formules (α) avec les nôtres (6), à la condition nécessaire et suffisante que la relation (7) soit vérifiée. Comme on a déjà $A = pa$, $B = pb$, $C = pc$, il suffira de faire

$$(\beta)\quad \begin{cases} d = -K + m + m'\mathbf{S}a + m''a, & d' = K + l + (l' + n)\mathbf{S}a - na, \\ e = -K + m + m'\mathbf{S}a + m''b, & e' = K + l + (l' + n)\mathbf{S}a - nb, \\ f = -K + m + m'\mathbf{S}a + m''c; & f' = K + l + (l' + n)\mathbf{S}a - nc; \\ a = -K + l + l'\mathbf{S}a + 2[m + m'\mathbf{S}a + m''(b + c - a) + na], \\ b = -K + l + l'\mathbf{S}a + 2[m + m'\mathbf{S}a + m''(c + a - b) + nb], \\ c = -K + l + l'\mathbf{S}a + 2[m + m'\mathbf{S}a + m''(a + b - c) + nc]. \end{cases}$$

Ces formules vérifient identiquement les conditions, dites de distribution ellipsoï-

Portons dans cette équation les valeurs (6) des forces élastiques, et désignons, avec M. Lamé, par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$. L'équation ci-dessus devient

$$\begin{aligned}\delta\frac{d^2u}{dt^2} &= [l+m+(l'+m'+m'')\,\mathbf{S}a+(l''+p-m'')\,a]\frac{d\theta}{dx}\\ &+[m+(m'+m'')\,\mathbf{S}a-m''a]\,\Delta_2 u\\ &+(p-m'')\left(a\frac{d^2u}{dx^2}+b\frac{d^2u}{dy^2}+c\frac{d^2u}{dz^2}\right)+(n-m'')\frac{d\,\mathbf{S}a\,\frac{du}{dx}}{dx}.\end{aligned}$$

On en déduira aisément les deux autres équations du mouvement.

Afin de simplifier, désignons les quotients par δ de

$$l+m+(l'+m'+m'')\,\mathbf{S}a,\quad l''+p-m'',\quad m+(m'+m'')\,\mathbf{S}a,$$
$$-m'',\quad p-m'',\quad n-m'',$$

---

dale des élasticités, données par M. de Saint-Venant dans le même Mémoire [n° 13, formules (56 et 57)], et qui sont

(7) Dans un premier mode,

$$2\mathrm{d}+\mathrm{d}'=\frac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2},\quad 2\mathrm{e}+\mathrm{e}'=\frac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{2},\quad 2\mathrm{f}+\mathrm{f}'=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2};$$

Dans un second mode,

$$2\mathrm{d}+\mathrm{d}'=\sqrt{\mathrm{bc}},\qquad 2\mathrm{e}+\mathrm{e}'=\sqrt{\mathrm{ca}},\qquad 2\mathrm{f}+\mathrm{f}'=\sqrt{\mathrm{ab}}.$$

Les deux modes reviennent au même dans le cas actuel; car les trois coefficients a, b, c étant presque égaux entre eux, la première ligne des relations (7) est, sauf erreur négligeable, identique à la seconde.

M. de Saint-Venant (n° 16 du même Mémoire), en s'appuyant sur la loi des actions moléculaires fonctions des distances, obtient les expressions des forces élastiques dans un milieu primitivement isotrope qui a subi une petite altération permanente par suite de compressions inégales exercées sur lui dans trois sens rectangulaires. Nos formules (6) deviennent identiques aux siennes, si la relation (7) est vérifiée, et si l'on fait en outre dans les équations (β), quels que soient a, b, c,

$$\mathrm{d}=\mathrm{d}',\quad \mathrm{e}=\mathrm{e}',\quad \mathrm{f}=\mathrm{f}';$$

ce qui revient à

$$(\delta)\qquad -\mathrm{K}+m=\mathrm{K}+l,\quad m'=l'+n,\quad m''=\quad n.$$

respectivement par λ, λ', μ, ρ, σ, ν. Les équations du mouvement deviendront

$$(8)\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = (\lambda+\lambda' a)\dfrac{d\theta}{dx} + (\mu+\rho a)\,\Delta_2 u + \sigma\left(a\dfrac{d^2u}{dx^2} + b\dfrac{d^2u}{dy^2} + c\dfrac{d^2u}{dz^2}\right) + \nu\dfrac{d\,\mathbf{S}a\dfrac{du}{dx}}{dx},\\ \dfrac{d^2v}{dt^2} = (\lambda+\lambda' b)\dfrac{d\theta}{dy} + (\mu+\rho b)\,\Delta_2 v + \sigma\left(a\dfrac{d^2v}{dx^2} + b\dfrac{d^2v}{dy^2} + c\dfrac{d^2v}{dz^2}\right) + \nu\dfrac{d\,\mathbf{S}a\dfrac{du}{dx}}{dy},\\ \dfrac{d^2w}{dt^2} = (\lambda+\lambda' c)\dfrac{d\theta}{dz} + (\mu+\rho c)\,\Delta_2 w + \sigma\left(a\dfrac{d^2w}{dx^2} + b\dfrac{d^2w}{dy^2} + c\dfrac{d^2w}{dz^2}\right) + \nu\dfrac{d\,\mathbf{S}a\dfrac{du}{dx}}{dz}. \end{cases}$$

Observons que tous les coefficients λ, λ', μ, ρ, σ, ν peuvent être indépendants d'après notre analyse; toutefois, quand les pressions A, B, C sont nulles, on a $p = 0$, et par suite $\sigma = \rho$.

Si la relation très-probable (7) est vérifiée, λ' et ν sont égaux, car ils valent tous les deux $\dfrac{n - m''}{\delta}$.

Nous raisonnerons désormais dans l'hypothèse que les actions déformatrices A, B, C deviennent constantes au bout d'un certain temps, et nous supposerons établie la nouvelle constitution permanente dans laquelle les coefficients λ, λ', μ, ρ, σ, ν ne varient plus.

Étudions les ondes planes propagées par le corps dans une direction quelconque. Soient m, n, p les cosinus des angles de cette direction avec les axes; I l'amplitude des vibrations et τ leur durée; m', n', p' les cosinus des angles qui fixent le sens de ces vibrations supposées rectilignes; enfin ω la vitesse de propagation de l'onde.

Les valeurs de u, v, w seront ici

$$u = \mathrm{I}m' \cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathbf{S}mx}{\omega}\right),$$

$$v = \mathrm{I}n' \cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathbf{S}mx}{\omega}\right),$$

$$w = \mathrm{I}p' \cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathbf{S}mx}{\omega}\right).$$

Elles pourront représenter des mouvements réels de milieu, pourvu qu'elles satisfassent aux équations (8). Portons donc dans celles-ci

ces valeurs de u, v, w. De plus, continuons à exprimer par $\mathbf{S}$ la somme de trois termes analogues. Nous obtiendrons entre m, n, p, m', n', p', ω les relations

$$(9)\quad \begin{cases} m[(\lambda+\lambda' a)\mathbf{S}mm'+\nu\mathbf{S}amm'] + m'(\mu+\rho a-\omega^2+\sigma\mathbf{S}am^2) = 0, \\ n\,[(\lambda+\lambda' b)\mathbf{S}mm'+\nu\mathbf{S}amm'] + n'\,(\mu+\rho b-\omega^2+\sigma\mathbf{S}am^2) = 0, \\ p\,[(\lambda+\lambda' c)\mathbf{S}mm'+\nu\mathbf{S}amm'] + p'\,(\mu+\rho c-\omega^2+\sigma\mathbf{S}am^2) = 0, \\ \text{auxquelles il faut joindre} \\ \mathbf{S}m'^2 = 1, \quad \mathbf{S}m^2 = 1. \end{cases}$$

Ajoutons les trois premières, multipliées respectivement par m, n, p. La somme donne

$$(10)\quad [\lambda+\mu-\omega^2+(\sigma+\lambda')\mathbf{S}a\,m^2]\,\mathbf{S}mm' + (\rho+\nu)\,\mathbf{S}amm' = 0.$$

Comme a, b, c sont très-petits, cette équation exprime : ou bien que $\mathbf{S}mm'$ est très-petit de l'ordre de a, b, c; ou bien que $\lambda+\mu-\omega^2$ l'est.

Soit d'abord $\mathbf{S}mm'$ très-petit. L'expression $\mathbf{S}mm'$ représente le cosinus de l'angle que fait la vibration avec la normale au plan de l'onde. Donc la vibration se fait presque dans le plan de l'onde : elle est quasi transversale. Les trois équations (9) montrent que ω^2 diffère de μ d'une quantité du même ordre de petitesse que a, b, c.

Les vibrations seraient rigoureusement transversales si $\mathbf{S}mm'$ était nul; cela arrive, d'après (10), lorsque

$$(11)\qquad (\rho+\nu)\,\mathbf{S}amm' = 0.$$

Soit actuellement $\lambda+\mu-\omega^2$ très-petit, c'est-à-dire ω^2 peu différent de $\lambda+\mu$. Les équations (9) donnent alors sensiblement

$$\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p} = \mathbf{S}mm' = \pm 1.$$

La vibration se fait à peu près normalement au plan de l'onde : elle est quasi longitudinale.

Elle serait rigoureusement longitudinale, si l'on pouvait vérifier les équations (9) en posant $m'=m$, $n'=n$, $p'=p$. Portons-y ces valeurs,

et nous trouverons pour conditions nécessaires et suffisantes

$$(\rho + \lambda')\,a = (\rho + \lambda')\,b = (\rho + \lambda')\,c. \tag{12}$$

Dans le cas où la relation (7) est vérifiée et où, par suite, $\nu = \lambda'$, on ne peut pas avoir $\rho + \nu = 0$ sans avoir en même temps $\rho + \lambda' = 0$, et réciproquement. Donc, dans ce cas, le milieu propage à la fois des ondes rigoureusement transversales et des ondes rigoureusement longitudinales, ou bien il propage à la fois des ondes quasi transversales et des ondes quasi longitudinales.

Lorsqu'on admet le principe des actions moléculaires simples fonctions des distances, les relations (δ) de la note précédente donnent $\rho + \lambda'$ ou $\rho + \nu$ égal à $3n$ divisé par la densité. Les ondes ne peuvent être généralement longitudinales ou transversales que pour $n = -m'' = 0$, c'est-à-dire [formules (β)] que si le milieu est isotrope.

§ III. — *Vibrations quasi transversales : équation aux vitesses.*

Dans l'étude des vibrations quasi transversales, $\mathbf{S}mm'$ est de l'ordre de a, b, c, et l'on peut négliger les termes en $a\mathbf{S}mm'$, $b\mathbf{S}mm'$, $c\mathbf{S}mm'$. Alors les trois premières équations (9) reviennent à l'égalité continue

$$\frac{m'}{\dfrac{m}{s^2-\alpha}} = \frac{n'}{\dfrac{n}{s^2-\beta}} = \frac{p'}{\dfrac{p}{s^2-\gamma}} = \lambda\mathbf{S}mm' + \nu\mathbf{S}amm', \tag{13}$$

dans laquelle, afin d'abréger, nous posons

$$\mu + \rho a = \alpha, \quad \mu + \rho b = \beta, \quad \mu + \rho c = \gamma, \quad \omega^2 - \sigma\mathbf{S}am^2 = s^2. \tag{14}$$

Pour que la quatrième $\mathbf{S}m'^2 = 1$ soit satisfaite, il suffira que

$$\left\{\begin{aligned} m' &= \frac{m}{s^2-\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}},\\ n' &= \frac{n}{s^2-\beta}\,\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}},\\ p' &= \frac{p}{s^2-\gamma}\,\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}}.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Alors les trois premières le seront si

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\frac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}} = \lambda\mathbf{S}mm' + \nu\mathbf{S}amm'.$$

Portons dans cette dernière les valeurs (15), et nous aurons l'équation qui donne la vitesse de propagation des ondes planes

$$\lambda\mathbf{S}\frac{m^2}{s^2-\alpha} + \nu\mathbf{S}\frac{am^2}{s^2-\alpha} = 1.$$

Elle peut être simplifiée. En effet, multiplions-la par le produit $(s^2-\alpha)(s^2-\beta)(s^2-\gamma)$, qui est du troisième ordre de petitesse; elle deviendra

$$\mathbf{S}m^2(s^2-\beta)(s^2-\gamma) = \text{quantité du troisième ordre en } a, b, c.$$

Pour que le premier membre devienne égal à zéro, au lieu d'être du troisième ordre de petitesse, il suffit de faire varier s^2 ou ω^2 d'une quantité du second ordre. Donc, sauf erreur négligeable sur la vitesse, l'équation ci-dessus revient à

$$(16) \qquad \mathbf{S}m^2(s^2-\beta)(s^2-\gamma) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}\frac{m^2}{s^2-\alpha} = 0.$$

Une variation du second ordre dans s^2 fait varier m', n', p' de quantités du premier ordre seulement, comme le montrent les formules (15). On peut donc adopter les équations (15) et (16) pour déterminer la vitesse des ondes planes et la direction des vibrations. La petite altération ainsi subie par m', n', p' a eu pour effet de rendre les vibrations rigoureusement transversales; car on a, d'après (15) et (16),

$$\mathbf{S}mm' = \mathbf{S}\frac{m^2}{s^2-\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\frac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}} = 0.$$

La vraie valeur de $\mathbf{S}mm'$, sauf erreur du second ordre, serait donnée par (10) et (15) : elle est

$$\mathbf{S}mm' = -\frac{\rho+\nu}{\lambda}\mathbf{S}amm' = -\frac{\rho+\nu}{\lambda}\mathbf{S}\frac{am^2}{s^2-\alpha}\,\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\frac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}}.$$

Ce résultat peut être simplifié. En effet, de la relation évidente

$$\mathbf{S}\frac{m^2(s^2-\mu-\rho a)}{s^2-\alpha}=1,$$

on tire

$$(s^2-\mu)\mathbf{S}\frac{m^2}{s^2-\alpha}-\rho\mathbf{S}\frac{am^2}{s^2-\alpha}=1,$$

ou simplement, d'après (16),

$$\mathbf{S}\frac{am^2}{s^2-\alpha}=-\frac{1}{\rho}.$$

On aura donc

(17) $$\mathbf{S}mm'=\frac{\nu+\rho}{\lambda\rho}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\frac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}}.$$

L'équation (16) est du second degré en s^2; elle donne deux valeurs généralement distinctes pour s^2 et, par suite, pour ω et m', n', p'. Ainsi, le corps peut généralement propager dans toutes les directions deux ondes planes quasi transversales, ayant chacune sa vitesse spéciale et une direction déterminée pour ses vibrations.

§ IV. — *Ellipsoïde d'élasticité, direction des vibrations.*

Des équations (15) et (16) on déduit

$$\mathbf{S}(s^2-\alpha)m'^2=\frac{\mathbf{S}\frac{m^2}{s^2-\alpha}}{\mathbf{S}\frac{m^2}{(s^2-\alpha)^2}}=0,\quad\text{ou bien}\quad s^2=\mathbf{S}\alpha m'^2.$$

Prenons, à partir de l'origine, dans la direction de la vibration, une droite égale à $\frac{1}{s}$, et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son extrémité. On aura $m'=x_1 s$, $n'=y_1 s$, $p'=z_1 s$, et le lieu des points (x_1, y_1, z_1) sera l'ellipsoïde

(18) $$\mathbf{S}\alpha x_1^2=1.$$

Dans le cas de $\sigma=0$ et, par suite, de $s=\omega$, la vitesse de propagation d'une onde plane est égale à l'inverse du demi diamètre de l'ellipsoïde, dirigé suivant la vibration correspondante. Dans ce cas

particulier, l'ellipsoïde est dit d'*élasticité* : nous lui conserverons le même nom, quel que soit σ.

Si l'on mène par l'origine, parallèlement aux ondes, un plan qui coupera l'ellipsoïde d'élasticité, les deux vibrations seront dirigées sensiblement suivant les deux axes de l'ellipse d'intersection. En effet, en prenant pour m', n', p' les valeurs (15), la vibration se fait dans le plan de l'onde. D'autre part, l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par un plan mené à l'origine parallèlement aux ondes est représentée par les deux équations

$$(18\ bis) \qquad \mathbf{S}\alpha x^2 = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}mx = 0;$$

sa tangente au point (x, y, z) aura les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes proportionnels à

$$n\gamma z - p\beta y, \quad p\alpha x - m\gamma z, \quad m\beta y - n\alpha x.$$

Au point de l'ellipse où aboutit le demi-diamètre parallèle à la vibration, ces cosinus seront proportionnels à

$$n\gamma p' - p\beta n', \quad p\alpha m' - m\gamma p', \quad m\beta n' - n\alpha m'.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le demi-diamètre soit un axe, c'est que la tangente lui soit perpendiculaire, ou que

$$\mathbf{S}m'(n\gamma p' - p\beta n') = 0.$$

Portons dans cette relation les valeurs (15), et elle devient l'identité

$$\mathbf{S}(\beta - \gamma) = 0$$

Les deux vibrations correspondantes à des ondes planes de même direction sont donc polarisées à angle droit. Celle qui est dirigée suivant le grand axe de l'ellipse (18 *bis*) correspond à la plus petite valeur de s^2, ou à la plus petite vitesse de propagation des ondes; celle qui est dirigée suivant le petit axe de l'ellipse correspond à la plus grande vitesse de propagation.

§ V. — *Surface de l'onde.*

Supposons qu'un mouvement périodique soit produit en un point intérieur d'un milieu indéfini et tout autour dans un très-petit espace.

Prenons ce point pour origine des coordonnées. Il est clair que toutes les autres molécules seront agitées de proche en proche et exécuteront des vibrations de même période que celles de l'origine. Les lieux géométriques des points où elles se trouveront simultanément à une même phase de la vibration, par exemple au commencement, seront des surfaces grandissantes, dites *surfaces des ondes*.

A une distance finie de l'origine, considérons un volume très-petit de matière, qui contienne néanmoins un nombre immense de champs de vibration, chose possible si nous supposons extrêmement petites la longueur d'onde et l'amplitude des mouvements. Dans cette portion de matière, les vibrations ont partout sensiblement la même largeur et la même direction. D'ailleurs les ondes sont très-rapprochées et formées à fort peu pres d'éléments plans parallèles. Donc elles y obéissent sensiblement aux lois des ondes planes.

Cela posé, considérons à un instant donné une onde encore voisine du centre de l'ébranlement, et les ondes successives qui entourent celle-là et qui occupaient sa place 1, 2, 3, ... éléments de temps dt avant l'instant considéré. Menons à chacune un plan tangent parallele à une direction fixe. Les points de contact de ces plans tangents sur les diverses ondes infiniment voisines seront infiniment voisins à cause de la continuité. Par suite, d'après la remarque précédente, la distance de deux d'entre eux sera sensiblement égale à ωdt, ω désignant la vitesse de propagation des ondes planes parallèles à ces plans tangents. Si donc on mène le plan tangent à l'onde qui est partie depuis un temps t du centre de l'ébranlement, ce plan sera distant de l'origine de la quantité $\int_0^t \omega dt$, qui égale ωt dans un milieu homogène.

Par conséquent, le milieu étant supposé homogène, une onde quelconque est l'enveloppe de toutes les ondes planes parties de l'origine en même temps qu'elle et dans tous les sens. En grandissant avec t, elle reste semblable à elle-même, et ses dimensions croissent proportionnellement au temps.

On appelle *rayon* toute droite qui part du centre de l'ébranlement. Il est clair que tous les plans tangents aux ondes menés par les divers points d'un rayon sont parallèles. De plus, les molécules situées sur

un même rayon exécutent leurs vibrations suivant des droites parallèles données par les lois des ondes planes.

Il suffit de calculer l'onde partie de l'origine depuis un temps $t = 1$. Prenons le pôle d'un plan tangent à cette onde par rapport à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ce pôle sera sur la normale menée de l'origine au plan tangent, et à une distance de l'origine égale à l'inverse de la normale ou à $\frac{1}{\omega}$. Le lieu de ces pôles, c'est-à-dire la polaire réciproque de l'onde, sera donc une surface ayant pour rayon, à partir de l'origine, dans la direction (m, n, p), la valeur correspondante de $\frac{1}{\omega}$.

Ainsi, la surface de l'onde est la polaire réciproque, par rapport à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, de la surface que l'on obtient en portant, à partir de l'origine, dans une direction quelconque, une ligne égale à l'inverse de la vitesse de l'onde plane perpendiculaire à cette direction. Cette surface a été considérée par Cauchy, dans ses Mémoires sur la lumière. Le théorème que je viens d'énoncer paraît avoir été donné pour la première fois par M. Haugton. Nous pourrions nous en servir pour trouver l'équation de l'onde; mais nous obtiendrons celle-ci bien plus simplement au degré d'approximation cherché

§ VI. — *Équations de l'onde et de ses plans tangents.*

Prenons l'équation aux vitesses sous la forme (16)

$$\mathbf{S}\frac{m^2}{\omega^2 - \sigma\mathbf{S}am^2 - \alpha} = \text{quantité finie.}$$

L'onde qui est partie de l'origine depuis l'unité de temps est l'enveloppe du plan $\mathbf{S}mx = \omega$, dirigé successivement dans tous les sens. Comme ω varie peu, elle ne différera pas beaucoup d'une sphère. La perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent, perpendiculaire dont la direction est déterminée par les cosinus m, n, p, ne fera qu'un angle très-petit de l'ordre de a, b, c avec le rayon mené au point de contact. Par suite, ce rayon, $r = \sqrt{\mathbf{S}x^2}$, ne différera de ω que d'une quantité très-petite du second ordre. Dailleurs m^2, n^2, p^2 valent à très-peu près $\frac{x^2}{r^2}$, $\frac{y^2}{r^2}$, $\frac{z^2}{r^2}$ ou $\frac{x^2}{\mu}$, $\frac{y^2}{\mu}$, $\frac{z^2}{\mu}$. Portant ces valeurs dans

l'équation aux vitesses, on trouvera celle de l'onde

$$\mathbf{S}\frac{x^2}{\mathbf{S}\left(1-\frac{\sigma a}{\mu}\right)x^2-\alpha} = \text{quantité finie.}$$

Posons

(19) $$x'^2 = \left(1-\frac{\sigma a}{\mu}\right)x^2, \quad y'^2 = \left(1-\frac{\sigma b}{\mu}\right)y^2, \quad z'^2 = \left(1-\frac{\sigma c}{\mu}\right)z^2,$$

et observons que, sans changer les rapports de x', y', z' à $\sqrt{\mathbf{S}x'^2}$, on peut faire varier $\mathbf{S}x'^2$ de quantités négligeables du second ordre; nous pourrons écrire

(20) $$\mathbf{S}\frac{x'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha} = 1.$$

Si l'on fait $\sigma = 0$, ou bien $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, l'onde est celle de Fresnel.

Dans le cas général, pour construire l'onde, on pourra d'abord construire celle de Fresnel (20), puis allonger chaque rayon de la quantité $\frac{\sigma}{2\mu\sqrt{\mu}}\mathbf{S}ax'^2$. En effet, un rayon quelconque est

$$\sqrt{\mathbf{S}x^2} = \sqrt{\mathbf{S}x'^2\left(1+\frac{\sigma\alpha}{\mu}\right)} = \sqrt{\mathbf{S}x'^2} + \frac{\sigma}{2\mu\sqrt{\mu}}\mathbf{S}ax'^2,$$

sauf erreur du second ordre. Ainsi, l'onde de Fresnel étant construite, un rayon quelconque $\sqrt{\mathbf{S}x^2}$ de l'onde générale est égal à un rayon très-voisin $\sqrt{\mathbf{S}x'^2}$ de celle de Fresnel, augmenté de la quantité $\frac{\sigma}{2\mu\sqrt{\mu}}\mathbf{S}ax'^2$. Or le rayon de l'onde générale, dont la direction coïncide avec ce rayon de l'onde de Fresnel, ne diffère que d'une quantité du second ordre des rayons voisins. Donc on obtiendra bien l'onde générale en allongeant de la quantité indiquée chaque rayon de celle de Fresnel.

L'équation (20) peut être présentée sous d'autres formes qui nous seront utiles. L'identité

$$1 = \mathbf{S}\frac{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)\mathbf{S}x'^2} = \mathbf{S}\frac{x'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha} - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2}\mathbf{S}\frac{\alpha x'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha},$$

combinée avec (20), donne

$$(21)\quad \mathbf{S}\frac{\alpha x'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha}=0,\quad \text{ou bien}\quad \mathbf{S}\alpha x'^2(\mathbf{S}x'^2-\beta)(\mathbf{S}x'^2-\gamma)=0.$$

En développant $(\mathbf{S}x'^2-\beta)(\mathbf{S}x'^2-\gamma)$ et multipliant le premier membre par $\mathbf{S}\alpha x'^2$, nous obtiendrons

$$\mathbf{S}\{x'^2[(\mathbf{S}\alpha x'^2)^2-(\alpha\beta+\alpha\gamma)\mathbf{S}\alpha x'^2+\alpha\beta\,\alpha\gamma)]\}=0$$

ou

$$\mathbf{S}x'^2(\mathbf{S}\alpha x'^2-\gamma\alpha)(\mathbf{S}\alpha x'^2-\alpha\beta)=0.$$

De là résulte une troisième forme de l'équation (20), en divisant par $(\mathbf{S}\alpha x'^2-\beta\gamma)(\mathbf{S}\alpha x'^2-\gamma\alpha)(\mathbf{S}\alpha x'^2-\alpha\beta)$,

$$(22)\qquad \mathbf{S}\frac{x'^2}{\mathbf{S}\alpha x'^2-\beta\gamma}=0.$$

Cherchons actuellement l'équation du plan tangent à l'onde. Soient x, y, z les coordonnées du point de contact; x_1, y_1, z_1, les coordonnées courantes. Si nous posons

$$f(x, y, z)=\mathbf{S}\frac{x'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha}=1,$$

l'équation de ce plan sera

$$\mathbf{S}x_1\frac{df}{dx}=\mathbf{S}x\frac{df}{dx}.$$

Or

$$\frac{df}{dx}=2x'\left[\frac{1}{\mathbf{S}x'^2-\alpha}-\mathbf{S}\frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}\right]\left(1-\frac{\sigma a}{2\mu}\right),$$

d'où il résulte, après quelques réductions, pour l'équation cherchée,

$$\mathbf{S}x_1 x'\left[1-\frac{\sigma a}{2\mu}-\frac{1}{\mathbf{S}x'^2-\alpha}\,\frac{1}{\mathbf{S}\dfrac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\right]=\mathbf{S}x'^2.$$

Le premier membre montre à quelles quantités sont proportionnels les cosinus m, n, p des angles que fait avec les axes la normale au plan

tangent. En extrayant la racine carrée de la somme des carrés de ces quantités, puis divisant par cette racine, on trouve

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{x'}{\sqrt{\mathbf{S}x'^2}}\left[1 - \frac{\sigma a}{2\mu} + \frac{\sigma}{2\mu^2}\mathbf{S}ax'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha}\,\frac{1}{\mathbf{S}\dfrac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\right],\\ n &= \frac{y'}{\sqrt{\mathbf{S}x'^2}}\left[1 - \frac{\sigma b}{2\mu} + \frac{\sigma}{2\mu^2}\mathbf{S}ax'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \beta}\,\frac{1}{\mathbf{S}\dfrac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\right],\\ p &= \frac{z'}{\sqrt{\mathbf{S}x'^2}}\left[1 - \frac{\sigma c}{2\mu} + \frac{\sigma}{2\mu^2}\mathbf{S}ax'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \gamma}\,\frac{1}{\mathbf{S}\dfrac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\right], \end{aligned}\right.$$

et, pour l'équation du plan tangent,

$$\mathbf{S}mx_1 = \sqrt{\mathbf{S}x^2},$$

comme cela devait être.

§ VII. — *Direction des vibrations.*

La direction des vibrations est donnée par les cosinus m', n', p', respectivement proportionnels (13) à

$$\frac{m}{\omega^2 - \sigma\mathbf{S}am^2 - \alpha},\quad \frac{n}{\omega^2 - \sigma\mathbf{S}am^2 - \beta},\quad \frac{p}{\omega^2 - \sigma\mathbf{S}am^2 - \gamma},$$

et par suite, très-sensiblement, à

$$(24)\qquad \frac{x'}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha},\quad \frac{y'}{\mathbf{S}x'^2 - \beta},\quad \frac{z'}{\mathbf{S}x'^2 - \gamma}.$$

La vibration, en un point (x, y, z), est dirigée comme au point correspondant tres-voisin (x', y', z') de l'onde de Fresnel.

Supposons que l'on mène le plan tangent à l'onde en (x, y, z) et le rayon qui aboutit à ce point; ensuite, qu'on projette le rayon sur le plan tangent. Cherchons l'angle que fait cette projection avec la vibration.

Pour trouver la projection du rayon sur le plan tangent, menons d'abord de l'origine une normale à ce plan. Soient x_1, y_1, z_1 les coor-

données du pied de la normale. Nous aurons

$$x_1 = m\sqrt{\mathbf{S}x^2} = x'\left[1 - \frac{\sigma a}{2\mu} + \frac{\sigma}{\mu^2}\mathbf{S}ax'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha}\frac{1}{\mathbf{S}\frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\right].$$

La projection du rayon sur le plan tangent, comptée à partir du pied de la normale, aura elle-même, pour projection sur l'axe des x,

$$(25)\qquad x - x_1 = x'\left[\frac{\sigma a}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu^2}\mathbf{S}ax'^2 + \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha}\frac{1}{\mathbf{S}\frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\right].$$

On aura de même $y - y_1$ et $z - z_1$.

Dans le cas $\sigma = 0$, qui est celui de l'onde de Fresnel, les quantités $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ sont proportionnelles (24) à m', n', p'. La vibration se fait suivant la projection du rayon sur le plan tangent.

Le carré de cette projection est dans le cas général, en négligeant les termes du troisième ordre de petitesse,

$$\mathrm{L}^2 = \mathbf{S}(x - x_1)^2 = \frac{1}{\mathbf{S}\frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\left[1 + \frac{2\sigma}{\mu}\mathbf{S}\frac{ax'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha}\right]$$
$$+ \frac{\sigma^2}{\mu^3}[\mathbf{S}x'^2\,\mathbf{S}a^2x'^2 - (\mathbf{S}x'ax')^2].$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$\mathbf{S}\frac{ax'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha} = \frac{1}{\rho}\left(\mathbf{S}\frac{\alpha x'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha} - \mu\,\mathbf{S}\frac{x'^2}{\mathbf{S}x'^2-\alpha}\right) = -\frac{\mu}{\rho},$$
$$\mathbf{S}x'^2\,\mathbf{S}a^2x'^2 - (\mathbf{S}x'ax')^2 = \mathbf{S}(b-c)^2y'^2z'^2;$$

d'où

$$(26)\qquad \mathrm{L}^2 = \frac{1}{\mathbf{S}\frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}\left(1 - \frac{2\sigma}{\rho}\right) + \frac{\sigma^2}{\mu^3}\mathbf{S}(b-c)^2y'^2z'^2.$$

Nous pouvons actuellement évaluer le cosinus de l'angle de la vibration avec la projection du rayon sur le plan tangent. Désignons par V cet angle, et nous trouverons

$$\cos\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{L}\sqrt{\mathbf{S}\frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2-\alpha)^2}}}\,\mathbf{S}\frac{x'(x-x_1)}{\mathbf{S}x'^2-\alpha},$$

ou bien, sauf erreur du premier ordre,

$$\cos V = \frac{1 - \frac{\sigma}{\rho}}{L\sqrt{S\frac{x'^2}{(Sx'^2 - \alpha)^2}}}.$$

Substituons à L sa valeur (26) et cherchons $\tang^2 V$. Nous aurons

$$\tang^2 V = \left(\frac{\frac{\sigma}{\rho}}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}\right)^2 \left[-1 + \frac{\rho^2}{\mu^3} S(b-c)^2 y'^2 z'^2 S\frac{x'^2}{(Sx'^2 - \alpha)^2}\right].$$

Extrayons la racine carrée, et rappelons que, l'angle V étant inférieur à deux droits, sa tangente a le signe de son cosinus, ou de $1 - \frac{\sigma}{\rho}$. En adoptant le signe + ou le signe −, suivant que $\frac{\sigma}{\rho}$ est positif ou négatif, nous aurons

$$\tang V = \frac{\pm\frac{\sigma}{\rho}}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}\sqrt{-1 + \frac{\rho^2}{\mu^3} S(b-c)^2 y'^2 z'^2 S\frac{x'^2}{(Sx'^2 - \alpha)^2}}.$$

Donnons au radical une autre forme, qui le montre essentiellement réel. Pour cela, dans l'identité

$$(f^2 + g^2 + h^2)(f'^2 + g'^2 + h'^2) - (ff' + gg' + hh')^2 = S(gh' - hg')^2,$$

faisons

$$f = \frac{x'}{Sx'^2 - \alpha}, \quad g = \frac{y'}{Sx'^2 - \beta}, \quad h = \frac{z'}{Sx'^2 - \gamma},$$
$$f' = x - x_1, \quad g' = y - y_1, \quad h' = z - z_1,$$

et substituons à $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ leurs valeurs (25). Nous tirerons

$$-1 + \frac{\rho^2}{\mu^3} S(b-c)^2 y'^2 z'^2 S\frac{x'^2}{(Sx'^2 - \alpha)^2}$$
$$= \rho^2 S\left\{\left[1 + \frac{\rho}{\mu}(b+c) - \frac{Sx'^2}{\mu} - \frac{\rho}{\mu^2} Sax'^2\right]\frac{(b-c)y'z'}{(Sx'^2 - \beta)(Sx'^2 - \gamma)}\right\}^2.$$

Par conséquent,

$$(27)\quad \operatorname{tang} V = \frac{\pm \frac{\sigma}{\rho}}{1 - \frac{\sigma}{\rho}} \sqrt{\rho^2 \mathbf{S} \left\{ \left[1 + \frac{\rho}{\mu}(b+c) - \frac{\mathbf{S} x'^2}{\mu} - \frac{\rho}{\mu^2} \mathbf{S} a x'^2 \right] \frac{(b-c) y' z'}{(\mathbf{S} x'^2 - \beta)(\mathbf{S} x'^2 - \gamma)} \right\}^2}.$$

Dans le cas où a, b, c sont inégaux, le radical ne peut s'annuler généralement. Alors tang V ne s'annule que pour $\frac{\sigma}{\rho} = 0$. C'est le cas de la double réfraction d'après Fresnel : la vibration se fait suivant la projection du rayon sur le plan tangent à l'onde.

De même, tang V ne devient infini que pour $1 - \frac{\sigma}{\rho} = 0$ ou $\sigma = \rho$. Ainsi, dans le cas de $\sigma = \rho$ seulement, la vibration se fait perpendiculairement à la projection du rayon sur le plan tangent.

§ VIII. — *Double réfraction suivant Fresnel et suivant MM. Mac-Cullagh et Newmann.*

Examinons les deux cas particuliers où $\sigma = 0$ et où $\sigma = \rho$.

Si $\sigma = 0$, nous avons vu que l'onde est celle de Fresnel (20), et de plus que la vibration se fait suivant la projection du rayon sur le plan tangent à l'onde, ce qui constitue le deuxième point de sa théorie de la double réfraction.

Le cas $\sigma = 0$, sans que ρ soit nul, n'est possible que lorsque le corps est soumis à des actions A, B, C inégales dans les divers sens. En effet, si le corps ne supportait que la pression normale et constante $-$K, les deux coefficients σ et ρ seraient égaux (§ II), et σ ne pourrait être nul sans que ρ le fût, ce qui détruirait la double réfraction. Ce cas tient donc essentiellement à la présence de tractions ou de compressions inégales dans les divers sens, exercées sur le milieu au moment même du phénomène. M. Briot l'obtient, dans ses *Essais sur la Théorie mathématique de la lumière* (n^os **43** et **45**), en supposant que les molécules d'éther se repoussent en raison inverse de la sixième puissance de la distance.

Soit maintenant $\sigma = \rho$, ce qui arrive quand le corps ne supporte en

tout sens que la pression constante — K. Prenons l'onde sous la forme (22), et substituons à x', y', z' leurs valeurs (19). Nous obtiendrons

$$\mathbf{S}\,\frac{x^2}{\mathbf{S}x^2 + \frac{\rho - \sigma}{\mu}\mathbf{S}ax^2 - [\mu + \rho(b+c)]} = \text{quantité finie, 1 par exemple,}$$

et, dans le cas $\sigma = \rho$,

$$(28) \qquad \mathbf{S}\,\frac{x^2}{\mathbf{S}x^2 - [\mu + \rho(b+c)]} = 1.$$

On voit que l'onde est alors identique à ce que devient celle de Fresnel, quand on remplace dans celle-ci a par $b + c$, b par $c + a$, c par $a + b$.

Si les axes sont tellement disposés qu'on ait $\rho a > \rho b > \rho c$, celui des x, celui des y et celui des z sont appelés respectivement axes de plus grande, de moyenne et de plus petite élasticité. L'axe de plus grande élasticité, dans le cas de $\sigma = \rho$, a, par rapport à la surface de l'onde, le même rôle que celui de plus petite élasticité pour $\sigma = 0$, et réciproquement. En effet, si

$$\rho a > \rho b > \rho c,$$

on aura

$$\rho(b+c) < \rho(c+a) < \rho(a+b).$$

Quant à la direction des vibrations, nous avons vu qu'elle est perpendiculaire à la projection du rayon sur le plan tangent. Ce serait le cas de la double réfraction, d'après les idées de MM. Mac-Cullagh et Newmann.

Les deux hypothèses $\sigma = 0$, $\sigma = \rho$ sont les seules pour lesquelles la vibration soit parallèle ou perpendiculaire à la projection du rayon sur le plan tangent (formule 27). Ce sont aussi les seules qui donnent à l'onde la forme de celle de Fresnel. En effet celle-ci, dans le cas où $a = b$, a une nappe sphérique, comme on le reconnaît facilement. Or, dans le même cas, l'onde générale n'a une sphère pour nappe que si $\sigma = 0$ ou $\sigma = \rho$.

§ IX. — *Propriétés diverses de l'onde générale.*

Je ne pousserai pas plus loin, dans ce Mémoire, l'étude de l'onde générale (**19** et **20**); mais je vais en indiquer quelques propriétés intéressantes.

Elle se compose de deux nappes, l'une intérieure, l'autre extérieure, qui ont quatre points communs. Les coordonnées de ceux-ci ne peuvent être évaluées que sauf erreur du premier ordre de petitesse, quand on néglige les termes du second degré en a, b, c. Les droites qui joignent ces points deux à deux en passant par le centre sont appelées axes optiques : si l'on a $\rho a > \rho b > \rho c$, elles font avec ceux des x, des y et des z des angles ayant respectivement, avec erreur du premier ordre, les cosinus

$$(29)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, & 0, & \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} & \text{pour la première,} \\ \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, & 0, & -\sqrt{\frac{b-c}{a-c}} & \text{pour la seconde.} \end{array} \right.$$

De plus U, U′ désignant les angles d'un rayon r de l'onde avec les axes optiques, l'équation polaire de la surface est, sauf des termes du second ordre,

$$(30)\quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \mu + \sigma b + \frac{\rho}{2}(a+c) \\ \qquad + \frac{2\sigma - \rho}{2}(a-c)\cos \mathrm{U} \cos \mathrm{U}' \pm \frac{\rho}{2}(a-c)\sin \mathrm{U} \sin \mathrm{U}'. \end{array} \right.$$

Aux extrémités des axes optiques, les deux nappes se raccordent en ombilic, de manière à y avoir une infinité de tangentes, communes à toutes deux, et dont le lieu géométrique est un cône circulaire très-évasé. Si l'on mène par l'ombilic un plan perpendiculaire à l'axe du cône, les génératrices sont inclinées sur ce plan d'un angle

$$(31)\quad \psi = \frac{1}{2\mu}\sqrt{\rho^2(a-b)(b-c)}.$$

L'axe du cône est lui-même dans le plan des axes optiques, et fait avec

l'axe optique correspondant, du côté de l'axe des x, un angle égal à $\left(1 - \frac{2\sigma}{\rho}\right)\psi$.

Enfin un certain plan, mené à une très-petite distance de l'ombilic, perpendiculairement à l'axe du cône, est tangent à la nappe extérieure sur tout un cercle dont le centre est sur cet axe et dont le rayon est vu du centre de l'onde sous l'angle ψ.

L'étude de la direction des vibrations, tout près des axes optiques, nécessite des considérations délicates. Il est nécessaire d'y tenir compte, dans les équations (8) du mouvement, des termes du second degré en a, b, c, qui influent notablement sur la valeur de $\mathrm{S}mm'$. Dans un travail plus étendu que celui-ci, je démontre que, lorsque le cosinus $\mathrm{S}mm'$ est du second ordre de petitesse très-près des axes optiques, la direction des vibrations est donnée par la loi suivante :

Si l'on décrit sur l'onde, de l'extrémité d'un axe optique comme centre, des circonférences de petits rayons, les molécules situées sur chacune d'elles vibrent vers un même point de la circonférence, celles de la nappe extérieure vers le point le plus voisin de l'axe des x, celles de la nappe intérieure vers le point le plus voisin de l'axe des y.

Quand $\mathrm{S}mm'$ est du premier ordre en a, b, c, aux mêmes endroits de l'onde, la même loi se vérifie à une distance finie, quoique assez petite, des axes optiques, mais non plus à une distance de ces axes de l'ordre de a, b, c.

§ X. — *Ondes quasi longitudinales.*

Étudions actuellement les ondes planes quasi longitudinales. L'expression $\lambda + \mu - \omega^2$ y est de l'ordre de a, b, c, et m', n', p' diffèrent peu de m, n, p. Nous pouvons donc, sauf erreur du second ordre, substituer dans l'équation (10), m, n, p à m', n', p'. Le carré de la vitesse de propagation sera

$$(32) \qquad \omega^2 = \lambda + \mu + (\sigma + \lambda' + \rho + \nu)\,\mathrm{S}am^2.$$

Pour que cette vitesse soit constante, il suffit que $\sigma + \lambda' + \nu + \rho = 0$. Si le milieu pouvait propager dans tous les sens des ondes rigoureusement transversales et des ondes rigoureusement longitudinales, on aurait les relations (11 et 12) $\rho + \nu = 0$, $\rho + \lambda' = 0$, et par consé-

quent $\sigma + \lambda' + \nu + \rho = \sigma - \rho$: la vitesse serait constante pourvu que $\sigma = \rho$, c'est-à-dire pourvu que la pression extérieure exercée sur le corps fût la même dans tous les sens. Il est tout à fait improbable qu'une pareille constance de la vitesse ω puisse exister ailleurs que dans un corps isotrope : donc, si le milieu est biréfringent, il ne doit pas pouvoir propager dans tous les sens des vibrations rigoureusement transversales ou rigoureusement longitudinales.

Prenons, à partir de l'origine et suivant la vibration, comme au § IV pour les ondes quasi transversales, une longueur égale à $\frac{1}{\omega}$. Les extrémités de ces lignes donneront l'ellipsoïde

$$(33) \qquad \mathbf{S}\left[\lambda + \mu + (\sigma + \lambda' + \nu + \rho)a\right]x^2 = 1 :$$

on pourrait l'appeler *ellipsoïde d'élasticité des vibrations longitudinales.*

Les considérations du § V étant entièrement applicables aux vibrations quasi longitudinales, on aura pour l'onde courbe la polaire réciproque de cet ellipsoïde par rapport à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. C'est l'ellipsoïde inverse

$$(34) \qquad \mathbf{S}\frac{x^2}{\lambda + \mu + (\sigma + \lambda' + \nu + \rho)a} = 1.$$

Enfin les relations (9) combinées avec (32) donnent aisément, pour déterminer la direction des vibrations, sauf erreur du second ordre,

$$(35) \qquad \begin{cases} \dfrac{m' - m}{m} = \dfrac{\lambda' + \rho}{\lambda}(a - \mathbf{S}am^2), \\ \dfrac{n' - n}{n} = \dfrac{\lambda' + \rho}{\lambda}(b - \mathbf{S}am^2), \\ \dfrac{p' - p}{p} = \dfrac{\lambda' + \rho}{\lambda}(c - \mathbf{S}am^2). \end{cases}$$

§ XI. — *Généralisation.*

Les formules fondamentales (6) ont été établies dans l'hypothèse que les actions déformatrices A, B, C gardent constamment les mêmes

rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ depuis le commencement de la déformation. Or il se peut que ces actions restent en effet, pendant un certain temps, proportionnelles aux trois nombres constants et très-petits a, b, c; mais, puis, qu'elles le soient, et pendant un autre temps quelconque, à trois autres a', b', c'; ensuite à trois autres a'', b'', c''; etc. Dans ce cas, tous les raisonnements du § I s'appliquent, ainsi que les résultats, à cela près que les coefficients d'élasticité contiendront, non plus seulement des termes en a, b, c, mais encore d'autres pareils en a', b', c', en a'', b'', c'', etc. Les formules (1) auront leurs termes en $l'\mathrm{S}a$, $l''a$, na, nb,..., remplacés par des sommes de termes pareils, lesquels contiendront a, a', a'',..., ou b, b', b'',..., ou c, c', c'',.... Nous désignerons ces sommes par $\sum l'\mathrm{S}a$, $\sum l''a$, $\sum na$, $\sum nb$,.... Les relations (4) seront toujours vérifiées, et les formules (6) seront encore vraies, sauf à y remplacer, comme il vient d'être dit, par une somme, chacun des termes en a, b, c. Toutefois, à cause des équations (5), $\sum pa$, $\sum pb$, $\sum pc$ se réduiront à un seul terme, qui représente la valeur actuelle de A, de B ou de C, et p sera nul pour tous leurs autres termes. Les formules (α) de la note qui termine le § I donneront toujours, entre chaque coefficient l'' et les coefficients correspondants n et p, la relation très-probable (7). Les formules (β) seront encore les mêmes, sauf toujours la substitution à chaque terme en a, b, c d'une somme de termes pareils. Elles ne cesseront pas de vérifier identiquement les conditions (γ) de distribution ellipsoïdale des élasticités. Il y aura toutefois cette différence, que les équations (β), privées des termes en a', b', c', a'', b'', c'',... donnent la relation

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\mathrm{d}-\mathrm{e}}{\mathrm{d}'-\mathrm{e}'}=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{f}}{\mathrm{e}'-\mathrm{f}'},$$

et par conséquent ne laissent pas entièrement indépendants les six coefficients d, e, f, d′, e′, f′, tandis que ces mêmes formules (β), avec leurs nouveaux termes en a', b', c', a'', b'', c'',..., ne supposent plus la condition (ε), et donnent, dans toute sa généralité, la distribution ellipsoïdale des élasticités.

Enfin les rapports des actions déformatrices A, B, C peuvent arbi-

trairement changer d'un instant à l'autre, bien que ces actions restent toujours appliquées aux mêmes éléments plans rectangulaires. Ce cas n'est qu'une extension du précédent, puisqu'il revient à supposer très-grand le nombre des quantités $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$. Les forces élastiques seront toujours données par les formules (6), dans lesquelles chaque terme en a, b, c sera remplacé par une somme de termes pareils.

Ainsi les expressions des forces élastiques, dans un milieu isotrope inégalement comprimé suivant trois directions rectangulaires, sont identiques, pourvu qu'on admette la relation (7), à celles que donne la distribution ellipsoïdale des élasticités prise dans toute sa généralité. Lorsqu'en particulier les actions déformatrices gardent entre elles les mêmes rapports durant tout le temps de la déformation, ces formules ne sont plus aussi générales, car leurs coefficients vérifient la relation (ε).

Les équations des petits mouvements seront toujours (8), sauf à mettre le signe de sommation $\sum$ devant tous les termes en a, b, c. On aura encore $\sigma = \rho$ si les actions A, B, C sont actuellement nulles, et $\nu = \lambda'$ si la relation (7) est vérifiée. Les formules (9), (10), (11) et (12) seront toujours vraies, à la même condition. En posant

$$s^2 = \omega^2 - \sum \sigma \mathrm{S} a m^2,\quad \mu + \sum \rho a = \alpha,\quad \mu + \sum \rho b = \beta,\quad \mu + \sum \rho c = \gamma;$$

$$\left(1 - \frac{\sum \sigma a}{\mu}\right) x^2 = x'^2,\quad \left(1 - \frac{\sum \sigma b}{\mu}\right) y^2 = y'^2,\quad \left(1 - \frac{\sum \sigma c}{\mu}\right) z^2 = z'^2,$$

les relations (15), (16), (18), (20), (21), (22), (24) restent les mêmes; (23), (25) et (28) sont vraies aussi, pourvu qu'on mette le signe de sommation $\sum$ devant les termes en σ et en ρ. Mais la formule (26) et celle qui donne tang V ne sont plus vraies généralement, car leur démonstration suppose que

$$\frac{\sum \sigma a}{\sum \rho a} = \frac{\sum \sigma b}{\sum \rho b} = \frac{\sum \sigma c}{\sum \rho c}.$$

Toutefois, il est clair que ces formules seront exactes, avec leurs conséquences, dans les deux cas particuliers $\sigma = 0$, $\sigma = \rho$, examinés au § VIII. Enfin les équations (32), (33), (34) et (35), relatives aux vibrations quasi longitudinales, subsisteront, avec le signe $\sum$ devant leurs termes en a, b, c. Donc tous les résultats concernant la propagation des ondes annoncés dans l'introduction de ce Mémoire subsistent, alors même que les actions déformatrices A, B, C ne gardent pas les mêmes rapports durant tout le temps de la déformation.

FORMULES DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS AMORPHES
QUE DES COMPRESSIONS PERMANENTES ET INÉGALES ONT RENDUS HÉTÉROTROPES;

Par M. DE SAINT-VENANT.

Dans un Mémoire publié en 1863 [*], j'ai étudié les lois de la distribution, autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu quelconque, de ses *élasticités directes,* en appelant ainsi les coefficients qui, multipliés par les proportions de petites dilatations produites dans les sens de diverses droites, donnent les composantes, dans les mêmes sens, des tensions ou forces élastiques qui en résultent sur l'unité superficielle de petites faces qui leur sont perpendiculaires. J'ai considéré particulièrement les corps où ces élasticités se distribuent *ellipsoïdalement,* c'est-à-dire où l'on a un ellipsoïde pour la surface dont les rayons vecteurs, menés dans leurs sens respectifs, mesurent les inverses, soit des racines carrées, soit des racines quatrièmes de ces mêmes élasticités.

Et j'ai montré que ce double mode de distribution ellipsoïdale, qui se réduit à un seul quand les élasticités en divers sens ont des grandeurs peu inégales, devait avoir lieu généralement dans les solides non isotropes mais *amorphes* ou à cristallisation confuse, tels que les métaux, etc., dont on peut regarder l'isotropie primitive comme ayant été altérée par un rapprochement permanent et inégal de leurs molécules en divers sens.

---

[*] *Voir* tome VIII, 2e série, p. 257-430 : « *Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope.* »

J'ai fait ressortir l'importance pratique des formules des pressions ou tensions relatives à ce mode, non-seulement pour les recherches des physiciens sur la lumière [*], mais aussi pour les calculs des ingénieurs sur la résistance des solides, car on n'emploie pas de corps régulièrement cristallisés dans les constructions et les machines, et tous les matériaux qu'on y met en œuvre sont dans le cas d'amorphisme dont nous venons de parler; en sorte que quand l'expérience dénote l'impossibilité d'y appliquer les formules connues d'isotropie à un seul coefficient (*voyez* plus loin), il convient de traiter avec les formules nouvelles et très-simples d'hétérotropie les questions qui leur sont relatives.

Mais c'est par un calcul d'*actions s'exerçant entre molécules très-proches et fonctions de leurs petites distances mutuelles* que j'ai, au Mémoire de 1863 cité, montré l'identité des formules de pressions dans les corps primitivement isotropes et déformés avec celles de distribution ellipsoïdale. Or un certain nombre de savants rejettent, depuis quelque temps, cette manière de procéder des inventeurs de la Mécanique des corps élastiques, bien qu'elle ne soit que l'application rigoureuse d'une grande loi physique qui est toujours tacitement invoquée, même quand on cherche à en éluder l'emploi [**]. Ils partent unique-

---

[*] Les recherches récentes sur la théorie de la lumière sont basées comme l'on sait, pour les uns, sur la supposition que l'éther, dans l'intérieur des corps transparents biréfringents, est un milieu resté homogène, mais dont l'isotropie primitive se trouve partout altérée comme par des compressions inégales dans trois sens; et, pour les autres, sur la supposition que l'isotropie, ou l'inégalité d'élasticité en divers sens autour de chaque point, subsiste partout dans de petites étendues, mais que la *densité* de l'éther varie d'une manière périodique en raison de l'action, quelle qu'elle soit, qui est exercée sur lui par les groupes, aussi périodiquement disposés, des molécules du corps cristallin où il est contenu. Tout en laissant à l'avenir la décision du choix entre ces deux hypothèses, la première semble digne d'attention et d'étude quand on considère que *le verre comprimé*, où les molécules ne forment que des groupes non périodiques, produit la double réfraction comme les corps régulièrement cristallisés, et que, quelle que soit la variété des formes et des contextures de ceux-ci, les principaux phénomènes optiques semblent ne les ranger qu'en deux classes : cristaux à un axe, cristaux à deux axes.

[**] *Voyez* la fin du nº 2 du Mémoire cité, et aussi l'Appendice V de ma nouvelle édition annotée (1864) des *Leçons* de Navier à l'École des Ponts et Chaussées.

ment, pour établir les formules des pressions ou forces élastiques dans des corps quelconques, de la supposition que leurs six composantes (*stress*) sont fonctions linéaires des six petites déformations élémentaires éprouvées (*strain*), ou, si l'on veut, des neuf dérivées partielles des déplacements des points par rapport à leurs coordonnées. M. le professeur Boussinesq, docteur ès sciences, vient donc de rendre à la théorie de l'élasticité un service réel en donnant, des nouvelles formules, une démonstration simple [*], se basant uniquement sur une supposition analogue et très-naturelle, à savoir que leurs coefficients sont eux-mêmes fonctions linéaires de trois quantités très-petites, relatives aux trois directions principales et orthogonales des compressions permanentes éprouvées. De cette manière, les formules en question seront, sans aucun doute, adoptées par tous les savants, quelle que soit leur opinion sur la loi des actions moléculaires; loi qui justifie au reste, quand on l'admet, les deux hypothèses de *linéarité* ainsi mises en œuvre simultanément.

Je crois utile, en conséquence, de reproduire ici sous une autre forme cette démonstration nouvelle, en la réduisant pour le cas d'*un corps solide* ayant pris un état d'équilibre stable après la cessation supposée de l'action des forces quelconques qui ont altéré d'une manière permanente son isotropie native; en sorte que *je ferai nulles* (sauf à les rétablir ensuite) *les pressions antérieures* aux déplacements relatifs *nouveaux* de ses points, déplacements qui seront supposés rester désormais dans les limites de la conservation de son élasticité, ou au-dessous de ce qui produirait de nouvelles altérations de contexture.

On sait que toute déformation d'un corps peut être réduite, en chacun de ses points, à trois compressions ou dilatations dites *principales*, ayant lieu dans des directions perpendiculaires entre elles [**].

---

[*] *Sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (article précédant celui-ci).

[**] Ce théorème est dû à Cauchy. Il l'a obtenu (*Exercices de Mathématiques*, 1826) au moyen de développements de Taylor à trois variables, etc. Mais on peut l'établir très-simplement, comme j'ai fait par exemple au *Bulletin de la Société philomathique* (26 novembre 1864) ou au numéro du 7 décembre du journal *l'Institut*, p. 389, en considérant d'une manière purement élémentaire ce que devient, par la déformation éprouvée, un élément sphérique de rayon très-petit. En effet, comme cette déforma-

Un corps primitivement isotrope, déformé d'une manière permanente, sera donc, en un point quelconque, *d'une contexture symétrique* par rapport à trois plans orthogonaux se coupant en ce point. Prenons leurs intersections mutuelles pour axes des x, des y, des z. Si nous appelons, comme il a été fait au Mémoire de 1863 et à plusieurs autres,

$$(1) \qquad \partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z \quad \text{et} \quad g_{yz},\ g_{zx},\ g_{xy}$$

les trois petites *dilatations* éprouvées, depuis le nouvel état stable du corps, par trois petites lignes matérielles qui étaient dirigées suivant les x, les y, les z avant les déplacements nouveaux ou élastiques, et les trois cosinus des angles très-peu aigus qu'elles font maintenant entre elles, cosinus qui mesurent les *glissements* relatifs de lignes matérielles très-proches et parallèles deux à deux aux mêmes axes, il résulte de la symétrie de contexture par rapport aux plans yz, zx, xy qu'on aura des expressions de la forme suivante pour les six composantes p_{xx}, p_{yy},..., p_{xy} des tensions ou pressions créées à travers

---

tion du corps est supposée s'opérer *avec continuité* d'une partie à l'autre, elle change les lignes droites matérielles en lignes courbes aussi *continues*, et qui, par conséquent, dans l'étendue de chaque élément très-petit, peuvent être considérées comme des lignes droites.

Or, en admettant cela seulement, on a pour conséquences : 1° que les petites lignes primitivement parallèles très-proches sont restées parallèles, car autrement celles qui les coupent perpendiculairement deviendraient courbes d'une courbure sensible; 2° que ces petites parallèles très-voisines se dilatent ou se contractent toutes également et chacune uniformément d'un bout à l'autre, car autrement leurs transversales obliques se courberaient sensiblement.

On pouvait, au reste, regarder *à priori* comme conséquences de la continuité cette conservation du parallélisme et cette uniformité des dilatations.

Toutes les cordes d'une même petite sphère, parallèles entre elles, s'allongent donc dans des proportions égales, et autant d'un côté que de l'autre du plan diamétral, reste plan, qui les coupe, et sur lequel elles prennent toutes la même inclinaison. Il en résulte que la petite sphère se change en un ellipsoïde. Les trois axes principaux et orthogonaux de cette surface donnent les dilatations ou contractions principales dont l'existence était à démontrer, et qui suffisent ainsi pour constituer toutes les déformations possibles de chaque élément.

l'unité superficielle de trois petites faces normales aux x, y, z, la première sous-lettre désignant la face par sa normale, et, la seconde, le sens de décomposition :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= \mathrm{a}\,\partial_x + \mathrm{f}'\,\partial_y + \mathrm{e}''\partial_z \\ p_{yy} &= \mathrm{f}''\partial_x + \mathrm{b}\,\partial_y + \mathrm{d}'\partial_z \\ p_{zz} &= \mathrm{e}'\partial_x + \mathrm{d}''\partial_y + \mathrm{c}\,\partial_z \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \begin{aligned} p_{yz} &= \mathrm{d}\,\mathrm{g}_{yz}, \\ p_{zx} &= \mathrm{e}\,\mathrm{g}_{zx}, \\ p_{xy} &= \mathrm{f}\,\mathrm{g}_{xy}; \end{aligned}$$

car si l'on donnait à ces expressions un plus grand nombre de termes, si, par exemple, on ajoutait à une composante normale p_{xx} des termes affectés des glissements g, et, à une composante tangentielle p_{yz}, des termes affectés des dilatations ∂, ces expressions ne seraient plus composées de même en fonction de ∂_x, ∂_y,..., g_{xy}, comme la symétrie l'exige, quand on changerait l'un des axes en son prolongement de l'autre côté de l'origine.

Nous désignons par les mêmes lettres, en ne les distinguant que par des accents, les coefficients qui doivent être regardés comme égaux d'après ce que nous verrons tout à l'heure.

Or si

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon''$$

représentent les proportions très-petites des compressions permanentes que le corps primitivement isotrope a éprouvées dans les sens x, y, z, chacun des coefficients a, b,..., f'' aura en ε, ε', ε'', d'après l'hypothèse dont nous avons parlé, et qui est facile à justifier par la loi des actions fonctions continues des distances moléculaires, une expression linéaire, c'est-à-dire de la forme

$$\alpha + l\varepsilon + m\varepsilon' + n\varepsilon''.$$

De plus, la première formule (2) $p_{xx} = \mathrm{a}\partial_x + \mathrm{f}'\partial_y + \mathrm{e}''\partial_z$ doit rester la même lorsque les deux axes des y et des z échangent leurs noms, c'est-à-dire lorsque, x, ∂_x et ε ne changeant pas, on permute à la fois y et z, ∂_y et ∂_z, ε' et ε''. En conséquence, f' et e'' doivent avoir la même partie indépendante de ε, ε', ε'' et la même partie affectée de ε; le coefficient de ε' dans f' doit être être le même que le coefficient de ε'' dans e'' et réciproquement. Enfin les coefficients de ε', ε'' doivent être

égaux dans a, et ils doivent l'être aussi dans d, qui affecte g_{yz} dans p_{yz}. On peut donc,

(3) $$\alpha,\ \delta,\ \delta',\ l,\ m,\ n,\ p,\ q,\ r,\ s$$

étant des constantes, poser la première et la quatrième des six lignes des formules suivantes (4) pour les coefficients de celles (2). Les quatre autres lignes s'en déduisent en faisant permuter circulairement et corrélativement x, y et z; ∂_x, ∂_y et ∂_z; ε, ε' et ε'' :

$$(4)\left\{\begin{array}{lll}
\mathrm{a} = \alpha + l\varepsilon + m\varepsilon' + m\varepsilon'', & \mathrm{f}' = \delta' + n\varepsilon + p\varepsilon' + q\varepsilon'', & \mathrm{e}'' = \delta' + n\varepsilon + q\varepsilon' + p\varepsilon'', \\
\mathrm{f}'' = \delta' + p\varepsilon + n\varepsilon' + q\varepsilon'', & \mathrm{b} = \alpha + m\varepsilon + l\varepsilon' + m\varepsilon'', & \mathrm{d}' = \delta' + q\varepsilon + n\varepsilon' + p\varepsilon'', \\
\mathrm{e}' = \delta' + p\varepsilon + q\varepsilon' + n\varepsilon'', & \mathrm{d}'' = \delta' + q\varepsilon + p\varepsilon' + n\varepsilon'', & \mathrm{c} = \alpha + m\varepsilon + m\varepsilon' + l\varepsilon'', \\
 & \mathrm{d} = \delta + r\varepsilon + s\varepsilon' + s\varepsilon'', & \\
 & \mathrm{e} = \delta + s\varepsilon + r\varepsilon' + s\varepsilon'', & \\
 & \mathrm{f} = \delta + s\varepsilon + s\varepsilon' + r\varepsilon''. &
\end{array}\right.$$

Mais si la compression permanente a été la même dans deux des sens, ceux des y et des z par exemple, c'est-à-dire si

$$\varepsilon' = \varepsilon'',$$

elle a été nécessairement la même, d'après le théorème de Cauchy relatif aux déformations, cité et démontré tout à l'heure, dans tous les autres sens perpendiculaires aux x, c'est-à-dire que le petit élément sphérique s'est changé en un ellipsoïde de révolution, et que la contexture, après la déformation effectuée, doit être symétrique autour de l'axe des x. Il en résulte, comme nous avons eu l'occasion de le montrer ailleurs [*], et comme on peut s'en assurer facilement de diverses manières, dont la plus simple résulte de la considération d'une rotation infiniment petite employée après Green par MM. Kirchhoff, etc., ainsi que par M. Boussinesq, qu'on doit avoir non-seulement

$$\mathrm{b} = \mathrm{c}, \quad \mathrm{e} = \mathrm{f}, \quad \mathrm{e}' = \mathrm{f}'', \quad \mathrm{e}'' = \mathrm{f}', \quad \mathrm{d}' = \mathrm{d}'',$$

[*] *Mémoire sur la torsion; Notes sur Navier;* et vingt-deuxième des *Leçons* (n° 272) *de Mécanique analytique* publiées en 1867 par M. Moigno.

conditions remplies ici d'elles-mêmes quand $\varepsilon' = \varepsilon''$, mais encore

$$(5) \qquad \mathfrak{b} = 2\mathfrak{d} + \mathfrak{d}'.$$

Mettant dans cette dernière égalité les valeurs (4) de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}'$ et faisant $\varepsilon' = \varepsilon''$, elle devient

$$\alpha + m\varepsilon + (l+m)\varepsilon' = 2\delta + 2r\varepsilon + 4s\varepsilon' + \delta' + q\varepsilon + (n+p)\varepsilon'.$$

Comme on doit l'avoir, quelles que soient les grandeurs absolues des quantités ε, ε', il en résulte

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 2\delta + \delta', \\ m &= 2r + q, \\ l + m &= 4s + n + p. \end{aligned} \right.$$

Ces trois relations ou équations de condition expriment, non pas que le corps est de contexture symétrique autour des x, mais que cette symétrie doit résulter de l'égalité de ε' à ε''. On les trouverait évidemment les mêmes en exprimant que la symétrie autour des y, des z, résulte respectivement de $\varepsilon'' = \varepsilon$, de $\varepsilon = \varepsilon'$; en sorte qu'elles doivent exister nécessairement entre les dix constantes (3).

Or, en substituant les valeurs de α, m, l qu'elles donnent dans celles (4) des trois coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, et en ajoutant celles-ci deux à deux, l'on trouve, entre eux et les neuf autres coefficients, les trois relations suivantes, qui sont indépendantes, comme on voit, des grandeurs de ε, ε', ε'', ainsi que des constantes δ, δ', n, p, q, r, s :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{b} + \mathfrak{c} &= 4\mathfrak{d} + \mathfrak{d}' + \mathfrak{d}'', \\ \mathfrak{c} + \mathfrak{a} &= 4\mathfrak{e} + \mathfrak{e}' + \mathfrak{e}'', \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b} &= 4\mathfrak{f} + \mathfrak{f}' + \mathfrak{f}''. \end{aligned} \right.$$

On a les trois mêmes relations (7), à cela près de termes négligeables, si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{f}''$, au lieu d'être linéaires en ε, ε', ε'', sont supposés des fonctions quelconques de ces quantités, développables suivant leurs puis-

sauces entières et les produits de celles-ci [*]. On trouve en effet, en opérant de même que tout à l'heure, c'est-à-dire en y faisant à la fois

$$\varepsilon' = \varepsilon'', \quad \mathrm{b} = 2\mathrm{d} + \mathrm{d}',$$

puis tirant α, m, l,,..., pour les substituer dans b et c, que

$$\mathrm{b} + \mathrm{c} - 4\mathrm{d} - \mathrm{d}' - \mathrm{d}''$$

se réduit à une expression ayant partout comme facteur

$$(\varepsilon' - \varepsilon'')^2.$$

Or nous regardons les petites contractions ε, ε', ε'' comme assez peu inégales pour que leurs différences soient d'ordre supérieur en petitesse, en sorte qu'on peut ne pas tenir compte de ce qui est affecté des carrés de ces différences.

Les relations (7) ont ainsi lieu *au delà même de l'hypothèse de linéarité*. Ce sont donc bien celles qui doivent exister entre les neuf coefficients des formules telles que (2) des six composantes de pression dans l'intérieur d'un corps qui n'en supportait aucune antérieurement aux déformations élastiques δ, g, lorsque son hétérotropie est résultée de petites compresions permanentes inégales dans les sens des x, des y, des z, c'est-à-dire lorsque ce corps non-isotrope n'est pas cristallisé régulièrement, mais possède une contexture amorphe ou à

---

[*] C'est-à-dire si l'on a des développements

$$\begin{aligned}
\mathrm{a} = {} & \alpha + l\varepsilon + m(\varepsilon' + \varepsilon'') + l_1\varepsilon^2 + m_1(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + l'_1\varepsilon'\varepsilon'' + m'_1\varepsilon(\varepsilon' + \varepsilon'') \\
& + l_2\varepsilon^3 + m_2(\varepsilon'^3 + \varepsilon''^3) + m'_2\varepsilon(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + m''_2\varepsilon^2(\varepsilon' + \varepsilon'') + l'_2\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' + l''_2\varepsilon'\varepsilon''(\varepsilon' + \varepsilon'') \\
& + l_3\varepsilon^4 + m_3(\varepsilon'^4 + \varepsilon''^4) + m'_3\varepsilon(\varepsilon'^3 + \varepsilon''^3) + m''_3\varepsilon^2(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + m'''_3\varepsilon^2(\varepsilon' + \varepsilon'') \\
& + l'_3\varepsilon^2\varepsilon'\varepsilon'' + l''_3\varepsilon'^2\varepsilon''^2 + l'''_3\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''(\varepsilon' + \varepsilon'') + l^{\mathrm{IV}}_3\varepsilon'\varepsilon''(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + l_4\varepsilon^5 + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d} = \delta + r\varepsilon + s(\varepsilon' + \varepsilon'') + r_1\varepsilon^2 + s_1(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + r'_1\varepsilon'\varepsilon'' + s'_1\varepsilon(\varepsilon' + \varepsilon'') + r_2\varepsilon^3 + \ldots,$$

$$\mathrm{d}' = \delta' + q\varepsilon + n\varepsilon' + p\varepsilon'' + q_1\varepsilon^2 + n_1\varepsilon'^2 + p_1\varepsilon''^2 + q'_1\varepsilon'\varepsilon'' + n'_1\varepsilon''\varepsilon + p'_1\varepsilon\varepsilon' + q_2\varepsilon^3 + \ldots,$$

d$''$ = ce qui résulte de la permutation réciproque de ε', ε'' dans d$'$,

b, c = ce qui résulte des permutations circulaires de ε, ε', ε'' dans a,

e, f = » » dans d,

e$'$, f$'$ = » » dans d$'$,

e$''$, f$''$ = » » dans d$''$.

cristallisation confuse comme les métaux, les pierres et même les bois, etc.

Tout le monde admet aujourd'hui qu'on doit avoir, en général, entre les mêmes coefficients, les trois égalités

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{d}' = \mathrm{d}'', \quad \mathrm{e}' = \mathrm{e}'', \quad \mathrm{f}' = \mathrm{f}''.$$

C'est en effet la condition pour que les six composantes de pression p_{xx}, p_{yy},..., p_{xy} soient les dérivées partielles, par rapport aux six déformations élémentaires ∂_x, ∂_y,..., g_{xy}, d'une même fonction du second degré représentant le potentiel moléculaire ou le travail de déformation élastique de l'unité de volume de l'élément parallélipipède dont les trois côtés adjacents ont été allongés dans les petites proportions ∂_x, ∂_y, ∂_z, et ont été inclinés l'un sur l'autre des petites quantités angulaires g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, travail qu'il peut restituer par détente en revenant à sa forme primitive. Cette condition est nécessaire pour qu'il n'en puisse jamais restituer davantage [*], ou pour que, conformément au principe des forces vives, il y ait impossibilité de créer du travail de toutes pièces ou sans consommation de moteur. Il suffit, pour cette triple égalité (8), qu'on ait, dans les expressions (4) des coefficients a, b,..., f'',

$$\text{(9)} \qquad n = p.$$

Les relations (7) se réduisent en conséquence à

$$\text{(10)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2\mathrm{d} + \mathrm{d}' = \dfrac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2}, \\ 2\mathrm{e} + \mathrm{e}' = \dfrac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{2}, \\ 2\mathrm{f} + \mathrm{f}' = \dfrac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}; \\ \text{d'où} \\ \mathrm{a} = 2\mathrm{e} + \mathrm{e}' + 2\mathrm{f} + \mathrm{f}' - 2\mathrm{d} - \mathrm{d}', \\ \mathrm{b} = 2\mathrm{f} + \mathrm{f}' + 2\mathrm{d} + \mathrm{d}' - 2\mathrm{e} - \mathrm{e}', \\ \mathrm{c} = 2\mathrm{d} + \mathrm{d}' + 2\mathrm{e} + \mathrm{e}' - 2\mathrm{f} - \mathrm{f}'. \end{array} \right.$$

---

[*] *Voyez* le n° 2 du Mémoire cité de 1863, ou le *Compte rendu des séances de*

Ce sont celles (56) de mon Mémoire de 1863, exprimant la condition du premier mode particulier de distribution des *élasticités directes*, consistant en ce que si l'on porte sur leurs directions diverses, à partir d'un même point, des longueurs proportionnelles aux inverses de leurs racines carrées, l'ensemble des extrémités forme un ellipsoïde.

Quand a, b, c diffèrent peu entre eux, ces relations reviennent au même, à cela près des carrés supposés négligeables de leurs différences, que celles

$$(11)\quad \begin{cases} 2d + d' = \sqrt{bc}, \qquad 2e + e' = \sqrt{ca}, \qquad 2f + f' = \sqrt{ab}, \\ \text{d'où} \\ a = \dfrac{(2e+e')(2f+f')}{2d+d'}, \quad b = \dfrac{(2f+f')(2d+d')}{2e+e'}, \quad c = \dfrac{(2d+d')(2e+e')}{2f+f'}, \end{cases}$$

qui portent le n° (57) au même Mémoire, et d'après lesquelles on a un ellipsoïde pour les surfaces dont les rayons vecteurs sont les inverses des racines quatrièmes au lieu des racines carrées des élasticités.

Enfin, d'après la loi physique des actions et réactions entre points matériels, suivant les directions de leurs lignes de jonction, et avec des intensités dépendant de leurs distances, loi prise aujourd'hui comme base de la Mécanique conformément à l'ensemble des faits, et sans laquelle même rien n'autoriserait à poser pour les forces élastiques des formules telles que (2), on doit avoir [*], outre les égalités (8), ces trois autres égalités

$$(12)\qquad d = d', \quad e = e', \quad f = f'.$$

Bien que celles-ci, admises par les premiers auteurs de la théorie de l'élasticité, soient mises en doute par des auteurs plus récents, toute formule où l'on attribuerait numériquement à d', e', f' des valeurs

---

l'Académie des Sciences, 16 décembre 1861, t. LIII, p. 1107, ou la vingt-deuxième (n° 270) des *Leçons de Mécanique analytique*, publiées en 1867 par M. l'abbé Moigno.

[*] *Voyez* la note [***] du n° 2 du Mémoire cité de 1863, ou le n° 283 de la vingt-deuxième *Leçon* citée.

différentes de celles qui seraient adoptées pour d, e, f se trouverait en contradiction avec la grande loi qu'on vient d'énoncer, et ne pourrait, suivant tout au moins les plus immenses probabilités, qu'induire en erreur ou mener à des interprétations illusoires de ce que les expériences peuvent fournir sur les solides. Introduisons donc ces égalités (12) dans nos relations (10) ou (11), nous aurons définitivement :

1° Avec les relations (10)

$$(13)\quad \begin{cases} p_{xx} = 3(\mathrm{e}+\mathrm{f}-\mathrm{d})\partial_x + \mathrm{f}\partial_y + \mathrm{e}\partial_z, & p_{zy} = \mathrm{d}\mathrm{g}_{yz}, \\ p_{yy} = \mathrm{f}\partial_x + 3(\mathrm{f}+\mathrm{d}-\mathrm{e})\partial_y + \mathrm{d}\partial_z, \quad \text{et} & p_{zx} = \mathrm{e}\mathrm{g}_{zx}, \\ p_{zz} = \mathrm{e}\partial_x + \mathrm{d}\partial_y + 3(\mathrm{d}+\mathrm{e}-\mathrm{f})\partial_z, & p_{xy} = \mathrm{f}\mathrm{g}_{xy}; \end{cases}$$

2° Avec les relations (11)

$$(14)\quad \begin{cases} p_{xx} = 3\dfrac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}\partial_x + \mathrm{f}\partial_y + \mathrm{e}\partial_z, & p_{yz} = \mathrm{d}\mathrm{g}_{yz}, \\ p_{yy} = \mathrm{f}\partial_x + 3\dfrac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}\partial_y + \mathrm{d}\partial_z, \quad \text{et} & p_{zx} = \mathrm{e}\mathrm{g}_{zx}, \\ p_{zz} = \mathrm{e}\partial_x + \mathrm{d}\partial_y + 3\dfrac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}\partial_z, & p_{xy} = \mathrm{f}\mathrm{g}_{xy}. \end{cases}$$

Telles sont les formules à adopter pour les pressions, tensions ou forces élastiques dans les corps amorphes non-isotropes comme sont les matériaux de construction.

On peut choisir à volonté, selon qu'on le trouve plus commode, la forme (13) ou la forme (14), car elles reviennent au même, à cela près de carrés négligeables, quand les différences deux à deux entre les élasticités directes a, b, c en trois sens, ou bien entre les élasticités tangentielles d, e, f, sont très-petites par rapport à ces élasticités elles-mêmes, ce qui a lieu pour les métaux même laminés, les pierres, le verre. Mais, sous la deuxième forme (14), elles paraissent, d'après quelques expériences (trop peu nombreuses il est vrai jusqu'ici), pouvoir s'étendre à des différences considérables d'élasticité dans le sens longitudinal et dans les sens transversaux des pièces, et être ainsi susceptibles de s'appliquer aux bois (Mémoire de 1863, n° **29**).

Il est entendu que si les déplacements absolus des points sont petits, on mettra dans ces formules, comme à l'ordinaire, en représentant

par u, v, w leurs projections suivant les x, y, z

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx},\quad \dfrac{dv}{dy},\quad \dfrac{dw}{dz},\quad \dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy},\quad \dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz},\quad \dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx},\\ \text{à la place de}\\ \partial_x,\quad \partial_y,\quad \partial_z,\quad g_{yz},\quad g_{zx},\quad g_{xy}.\end{array}\right.$$

Et si l'on veut les rendre applicables à l'éther lumineux de l'intérieur des corps transparents, où il convient, pour plus de généralité, de supposer la possibilité de pressions très-considérables, antérieures aux déplacements élastiques u, v, w, il faudra, conformément aux formules (10) du Mémoire de 1863 (dues à Cauchy et auxquelles Poisson a finalement acquiescé), en appelant

$$p^0_{xx},\quad p^0_{yy},\quad p^0_{zz}$$

ces pressions primitives, qui ne peuvent, vu la symétrie, être que normales aux plans yz, zx, xy; il faudra, dis-je, ajouter respectivement aux six formules (13) ou (14)

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{lll} p^0_{xx}\left(1+\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dw}{dz}\right), & & p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz}+p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy},\\ p^0_{yy}\left(1-\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dw}{dz}\right), & \text{et} & p^0_{xx}\dfrac{dw}{dx}+p^0_{zz}\dfrac{du}{dz},\\ p^0_{zz}\left(1-\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dy}+\dfrac{dw}{dz}\right), & & p^0_{yy}\dfrac{du}{dy}+p^0_{xx}\dfrac{dv}{dx};\end{array}\right.$$

ce qui donnera les formules générales embrassées de suite par l'analyse de M. Boussinesq.

Mais, pour les solides, les formules (13) ou (14) suffisent sans ces additions, ou en ajoutant tout au plus p^0_{xx}, p^0_{yy}, p^0_{zz} aux trois de gauche s'il se rencontrait quelque cas où il fallût tenir compte de pressions antérieures, d'une intensité comparable à celles des pressions mises en action par les déplacements u, v, w.

Quand on fait

$$\mathrm{d}=\mathrm{e}=\mathrm{f},$$

on obtient, par (13) comme par (14), les formules d'isotropie à un seul

coefficient trouvées de 1821 à 1827 par Navier, Cauchy, Poisson, Lamé et Clapeyron. On y a substitué, depuis, ces formules connues d'isotropie à deux coefficients qui sont en contradiction avec la loi moléculaire, et propres à égarer comme on vient de dire; formules introduites 1° en Angleterre par l'expédient au moyen duquel Green chercha à concilier la théorie de l'élasticité avec l'hypothèse (de Fresnel) de l'*exacte* transversalité des vibrations lumineuses jusque dans l'intérieur des cristaux, hypothèse qui n'a plus aujourd'hui de partisans; 2° en France par les tentatives d'interpréter diverses expériences de Wertheim, etc., en supposant isotropes le laiton et le verre sur lesquels elles ont été faites, tandis que tout portait à penser, avec M. Regnault, qu'ils ne l'étaient pas exactement. Nos formules (13) ou (14) à *trois* coefficients, qui supposent un léger degré d'hétérotropie toujours infiniment probable, se prêtent certainement bien mieux à interpréter les faits quelconques, que les formules à *deux* coefficients dont nous signalons la fausseté et le danger, et auxquelles il y a lieu d'espérer qu'on renoncera bientôt pour toutes les applications; bien que je ne me refuse toujours pas à en faire usage analytiquement, ainsi que des formules plus générales de Green à six paramètres de trop, pour montrer que certains résultats généraux ont lieu avec les unes comme avec les autres, et doivent être adoptés quelle que soit l'opinion qu'on persiste à se faire sur le point contesté.

EXPOSITION, D'APRÈS LES PRINCIPES DE JACOBI,

De la méthode suivie par M. Delaunay dans sa Théorie du Mouvement de la Lune autour de la Terre;

EXTENSION DE LA MÉTHODE;

Par M. F. TISSERAND.

INTRODUCTION.

La Mécanique céleste a en vue deux problèmes principaux, la détermination des mouvements des centres de gravité des corps célestes, et celle des mouvements des mêmes corps autour de leurs centres de gravité. Ces deux problèmes sont d'une égale importance au point de vue de l'Astronomie; car les observations des planètes se font de la surface de la Terre, et sont relatives à des axes liés au mouvement de la Terre sur elle-même; on ne peut donc connaître les positions absolues, et, par suite, déterminer exactement les mouvements des planètes que si l'on a déterminé avec précision le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

C'est pour résoudre le premier problème que fut imaginée la méthode de la *variation des constantes arbitraires,* méthode que Poisson appliqua heureusement ensuite au second problème.

Or, il arrive que la méthode de la variation des constantes arbitraires, si importante dans la *Mécanique céleste,* peut être présentée avec une extrême simplicité et une grande élégance, quand on part de la théorie d'Hamilton, perfectionnée par Jacobi. C'est donc à cette dernière théorie qu'il semble convenable de rattacher l'exposition des principes de la Mécanique céleste.

Le premier des deux problèmes principaux dont je viens de parler

présente un cas d'une grande importance : celui de la détermination du mouvement des satellites autour de leurs planètes, et en particulier du mouvement de la Lune autour de la Terre. Ce dernier problème offre de grandes difficultés, résultant de la grandeur de la fonction perturbatrice, et du peu de convergence des approximations successives. Dans ces dernières années, M. Delaunay a fait connaître une nouvelle méthode d'intégration, qui présente de grands avantages sur celles employées jusqu'ici, et qui doit donner lieu aux Tables théoriques les plus précises du Mouvement de la Lune.

C'est cette méthode d'intégration elle-même que je vais exposer d'après la méthode de Jacobi; on verra qu'on peut le faire très-simplement.

Je montrerai en outre comment la méthode de M. Delaunay peut être généralisée, et appliquée à la détermination d'une partie importante des perturbations réciproques de deux planètes, particulièrement de Jupiter et de Saturne.

Tel est le but de ce travail.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — *Principes fondamentaux.*

Je commence par rappeler les principes sur lesquels j'aurai à m'appuyer.

Théorème I. — *Les équations d'un problème de dynamique dans lequel les liaisons sont indépendantes du temps, et où il existe une fonction des forces, peuvent être ramenées à la forme suivante, dite* forme canonique :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{dq_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = +\frac{d\Omega}{dp_i}: \tag{1}$$

Ω désigne dans ces équations la différence entre la demi-force vive T et la fonction des forces U, de telle sorte que

$$\Omega = T - U.$$

Les variables q sont les variables principales réduites au plus petit nombre possible; la force vive $2T$ étant exprimée en fonction de ces variables q_i et de leurs dérivées $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$, nous posons

$$p_i = \frac{dT}{dq'_i},$$

et nous introduisons les variables p_i au lieu des dérivées q'_i, en sorte que la force vive et la fonction Ω se trouvent exprimées par les variables p et q. Quant à l'indice i, il doit recevoir les valeurs $1, 2, \ldots, n$, si n est le nombre des variables q.

Le deuxième théorème que nous allons rappeler se rapporte à l'intégration des équations (1), ou même d'équations plus générales.

Théorème II. — *Soit proposé d'intégrer les $2n$ équations*

$$(2) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{df}{dq_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{df}{dp_i},$$

dans lesquelles f désigne une fonction du temps et des variables p et q, $f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Il suffit de trouver une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dS}{dt} + f\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, \frac{dS}{dq_n}\right) = 0,$$

c'est-à-dire une solution contenant n constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, distinctes de celle qu'on peut toujours ajouter à S; moyennant quoi les intégrales des équations (2) seront

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dS}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \dfrac{dS}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \dfrac{dS}{d\alpha_n} = \beta_n, \\ \dfrac{dS}{dq_1} = p_1, \quad \dfrac{dS}{dq_2} = p_2, \ldots, \quad \dfrac{dS}{dq_n} = p_n; \end{array}\right.$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ désignant n nouvelles constantes arbitraires.

Ces équations (3) donneront, comme on voit, les $2n$ variables p et q en fonction du temps et des $2n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

Les théorèmes suivants se rapportent à la variation des constantes arbitraires.

Supposons que dans les équations (2) on remplace la fonction f par $f - V$, V étant une fonction du temps et des variables p et q, ce qui, dans les problèmes de dynamique, reviendra à ajouter à la fonction des forces U une fonction V dite *fonction perturbatrice*. On pourra supposer que les variables p et q restent les mêmes fonctions du temps et des quantités α, β, qui sont déterminées par les équations (3); mais alors les arbitraires α et β seront des variables dont le théorème suivant fera connaître les dérivées.

Théorème III. — *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les arbitraires introduites par l'intégration des équations* (1); *pour intégrer les équations qu'on déduit des équations* (1) *en remplaçant f par $f - V$, on prendra pour nouvelles variables les arbitraires α et β, et leurs dérivées seront données par les $2n$ équations*

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{dV}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{dV}{d\alpha_i}, \tag{4}$$

dans lesquelles V est exprimée en fonction du temps et des nouvelles variables α et β.

On voit donc que, quand on suit la méthode d'intégration de Jacobi, la théorie de la variation des arbitraires est d'une simplicité remarquable; les équations ont encore la *forme canonique;* aussi donne-t-on aux arbitraires α et β le nom d'*arbitraires canoniques*.

Il existe une infinité de systèmes d'arbitraires canoniques; lorsqu'un tel système est connu, on peut en obtenir une infinité d'autres au moyen du théorème suivant dû à Jacobi.

Théorème IV. — *Soient α, β un système d'arbitraires canoniques, et ψ une fonction arbitraire des arbitraires α et de n nouvelles variables α'; les $2n$ équations*

$$\frac{d\psi}{d\alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{d\psi}{d\alpha'_i} = \beta'_i \tag{5}$$

détermineront un nouveau système α', β' qui sera également canonique.

§ II. — *Des équations d'où dépend le mouvement de la Lune autour de la Terre. — Mouvement elliptique.*

Soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires passant par le centre de la Terre, x, y, z les coordonnées du centre de la Lune, x', y', z' celles du centre du Soleil, m, m', M les masses de la Lune, du Soleil et de la Terre, R la fonction

$$(6) \qquad R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right];$$

les équations du mouvement de la Lune seront

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{x}{r^3} &= \frac{dR}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{y}{r^3} &= \frac{dR}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{z}{r^3} &= \frac{dR}{dz}; \end{aligned}\right.$$

μ y désigne la somme $M + m$.

Si l'on supprime les seconds membres, on a les équations du mouvement elliptique

$$(\alpha) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{z}{r^3} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Nous allons nous occuper d'abord de l'intégration de ces équations, en suivant la méthode de Jacobi.

Nous prendrons des coordonnées polaires r, ψ et φ, le rayon vecteur, la longitude et la latitude géocentriques du centre de la Lune; on aura donc, pour lier les deux systèmes de coordonnées, les équations

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\cos\varphi\sin\psi, \quad z = r\sin\varphi.$$

On suppose que le plan des xy est le plan de l'écliptique, et que ox est la ligne des équinoxes.

On trouve aisément que la demi-force vive exprimée avec les nouvelles variables est

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right];$$

les variables p seront donc respectivement, d'après le théorème I du § I,

$$\frac{dr}{dt}, \quad r^2\frac{d\varphi}{dt}, \quad r^2\cos^2\varphi\,\frac{d\psi}{dt},$$

et on voit que l'équation aux dérivées partielles d'où dépend le problème sera, d'après le même paragraphe,

$$(7) \qquad \frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{dS}{d\psi}\right)^2\right] = \frac{\mu}{r}.$$

Il s'agit de trouver une solution de cette équation renfermant trois constantes arbitraires C, G et H.

Or, l'équation (7) ne contenant explicitement ni le temps t, ni la longitude ψ, on peut poser

$$S = -Ct + H\psi + S_1,$$

S_1 étant une simple fonction de r et φ, et la question sera ramenée à la recherche d'une solution de l'équation

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_1}{d\varphi}\right)^2 + \frac{H^2}{r^2\cos^2\varphi}\right] = \frac{\mu}{r} + C$$

contenant une seule arbitraire nouvelle; or on peut séparer l'équation précédente en deux autres, en posant

$$\left(\frac{dS_1}{d\varphi}\right)^2 + \frac{H^2}{\cos^2\varphi} = G^2,$$

$$\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{G^2}{r^2},$$

G étant une constante; et l'on satisfait à ces équations en posant

$$S_1 = \int\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi + \int\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{G^2}{r^2}}\,dr;$$

on a, en conséquence,

$$(8)\qquad S = -Ct + H\psi + \int\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi + \int\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{G^2}{r^2}}\,dr.$$

Telle est la solution complète de l'équation (7) que nous voulions obtenir; elle contient les trois constantes arbitraires C, G, H.

Les intégrales du problème seront d'après le § I, en désignant par c, g, h trois nouvelles arbitraires,

$$c = \frac{dS}{dC},\quad g = \frac{dS}{dG},\quad h = \frac{dS}{dH},$$

ou bien

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} t + c &= \int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{G^2}{r^2}}},\\ g &= G\int\frac{d\varphi}{\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}} - G\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{G^2}{r^2}}},\\ h &= \psi - H\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}}.\end{aligned}\right.$$

Il importe de rechercher la signification géométrique de nos six constantes C, G, H, c, g, h.

Il est clair qu'en égalant à zéro le radical $\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{G^2}{r^2}}$, on aura les rayons vecteurs maxima et minima de l'orbite. Soient ces deux rayons $a(1-e)$ et $a(1+e)$: ce seront les deux racines de l'équation

$$2Cr^2 + 2\mu r - G^2 = 0;$$

on aura donc

$$\frac{\mu}{C} = -2a,\quad -\frac{G^2}{2C} = a^2(1-e^2);$$

d'où, en désignant par p le demi-paramètre,

$$C = -\frac{\mu}{2a},\quad G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = \sqrt{\mu p}$$

De même, en égalant à zéro le radical $\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}$, on aura la plus grande valeur de la latitude φ : c'est évidemment l'inclinaison i de l'orbite. On a donc

$$H = G\cos i \quad \text{ou} \quad H = \sqrt{\mu p}\cos i.$$

Avant de chercher la signification géométrique des trois autres constantes, il convient de fixer les limites inférieures des intégrales qui entrent dans l'expression (8) de S. Nous ferons commencer l'intégrale relative à φ à partir de $\varphi = 0$, et celle relative à r à partir du périgée, c'est-à-dire à partir de $r = a(1-e)$.

Comme l'élément différentiel $\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{G^2}{r^2}}\,dr$ s'annule pour cette limite inférieure, les dérivées $\frac{dS}{dC}$ et $\frac{dS}{dG}$ ne seront pas changées, bien que la limite inférieure soit une fonction de C et G; nous aurons donc pour les intégrales

$$(9\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} t + c &= \int_{a(1-e)}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{2G^2}{r^2}}},\\ g &= G\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}} - G\int_{a(1-e)}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2C - \frac{2G^2}{r^2}}},\\ h &= \psi - H\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}}. \end{aligned}\right.$$

Si dans la première de ces formules on fait la limite supérieure r égale à $a(1-e)$, on a

$$c = -\tau,$$

τ désignant le temps du passage au périgée.

Si dans la troisième on fait $\varphi = 0$, ce qui répond au nœud, on a

$$h = \psi.$$

Donc h est la longitude du nœud.

Enfin si, dans la seconde des mêmes formules, on suppose que les limites supérieures répondent au périgée, on aura, en désignant sa latitude par φ_1,

$$g = \mathrm{G}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mathrm{G}^2 - \frac{\mathrm{H}^2}{\cos^2\varphi}}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\varphi}}.$$

Si l'on fait $\sin\varphi = \sin i \sin\eta$, η sera, comme on le voit aisément, l'argument de la latitude, et l'on aura

$$g = \eta_1.$$

Donc g est l'argument de la latitude du périgée.

Soit donc xy le plan fixe, NΠ l'orbite de la Lune, N le nœud ascendant de l'orbite, Π son périgée; on aura les valeurs des six constantes par les formules suivantes :

$$\mathrm{C} = -\frac{\mu}{2a}, \quad \mathrm{G} = \sqrt{\mu p}, \quad \mathrm{H} = \sqrt{\mu p}\cos i;$$
$$c = -\tau, \quad g = \mathrm{N}\Pi, \quad h = x\mathrm{N}.$$

§ III. — *Équations du mouvement troublé.*

Si dans les équations (α) du paragraphe précédent on rétablit les seconds membres, on a les équations (a) du mouvement troublé. La fonction R, qui dépendait de x, y, z, x', y', z', va devenir une fonction connue de x', y', z', c'est-à-dire du temps t et des constantes C, G, H, c, g, h; car x, y, z dépendent de r, ψ et φ, et ces dernières quantités sont, par les équations (9 *bis*), des fonctions connues du temps et des six constantes.

Ces six arbitraires seront alors de nouvelles variables, et la théorie de Jacobi nous apprend que les dérivées de ces variables seront données par les équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{C}}{dt} &= \frac{d\mathrm{R}}{dc}, & \frac{dc}{dt} &= -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{C}};\\ \frac{d\mathrm{G}}{dt} &= \frac{d\mathrm{R}}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}};\\ \frac{d\mathrm{H}}{dt} &= \frac{d\mathrm{R}}{dh}, & \frac{dh}{dt} &= \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}};\end{aligned}\right.$$

Avant d'aller plus loin, faisons une application de ces formules, en supposant que la fonction perturbatrice R soit une fonction du rayon vecteur r seulement, $F(r)$. La première des équations (9 *bis*) montre que r ne dépend que du temps t et des constantes c, C et G; il en est donc de même aussi de R, et par suite on a

$$\frac{dR}{dg} = 0, \quad \frac{dR}{dh} = 0, \quad \frac{dR}{dH} = 0;$$

les équations (10) donneront donc

$$G = \text{const.}, \quad H = \text{const.}, \quad h = \text{const.}$$

Donc une telle fonction perturbatrice laisse invariables la longitude du nœud, l'inclinaison de l'orbite, ce qui était évident, mais en outre le paramètre de l'orbite. Le grand axe et l'excentricité varient de façon que $\sqrt{a(1-e^2)}$ reste constant (au moins dans la première approximation).

Cette application présente un certain intérêt historique. Quand on commença à appliquer l'analyse à la recherche des inégalités de la Lune, le mouvement du périgée calculé fut notablement différent du mouvement observé; cela conduisit Clairaut à supposer que l'attraction de la Terre sur la Lune se composait de deux parties : l'une, de beaucoup la plus forte, inversement proportionnelle au carré de la distance; l'autre, beaucoup plus faible, inversement proportionnelle au cube de la distance. La fonction perturbatrice était donc de la forme $\frac{A}{r^2}$; elle rentre dans le cas que l'on vient d'examiner. On voit que l'addition de ce terme avait pour effet de modifier le grand axe, l'excentricité, le périgée et la longitude moyenne de la Lune; mais elle laissait le paramètre de l'orbite invariable.

Revenons à la question qui nous occupe.

Les équations (10) présentent un grave inconvénient. On sait que, dans le mouvement elliptique, les coordonnées x, y, z sont des fonctions périodiques de $n(t+c)$, n étant le moyen mouvement de la Lune; un terme quelconque de la fonction perturbatrice sera donc de la forme

$$A \cos[kn(t+c)+q],$$

h étant un nombre entier, q une constante et A une fonction de C, G, H. Quant à la quantité n, elle est donnée par l'équation

$$n^2 a^3 = \mu, \quad \text{d'où} \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Or, on a

$$a = \frac{-\mu}{2C};$$

donc

$$n = \sqrt{\frac{-8C^3}{\mu^2}}.$$

n est donc une fonction de C, et on voit que quand on voudra appliquer les formules (10), en formant la dérivée partielle $\frac{dR}{dC}$, le temps sortira des signes sin et cos, ce qui empêcherait les formules de s'appliquer indéfiniment et s'opposerait à la construction des Tables.

On évitera cet inconvénient en prenant au lieu de c la variable l définie par l'équation

$$(b) \qquad l = n(t + c),$$

on voit que l est l'anomalie moyenne. On aura, en désignant par $\left(\frac{dR}{dC}\right)$ la dérivée partielle prise sans faire varier C dans $n(t+c)$,

$$\frac{dR}{dC} = \left(\frac{dR}{dC}\right) + \frac{dR}{dl}(t+c)\frac{dn}{dC},$$

par suite,

$$\frac{dc}{dt} = -\left(\frac{dR}{dC}\right) - \frac{dR}{dl}(t+c)\frac{dn}{dC}.$$

On a du reste, d'après la formule (b),

$$\frac{dl}{dt} = n + n\frac{dc}{dt} + (t+c)\frac{dn}{dC}\frac{dC}{dt},$$

ou, en remplaçant $\frac{dC}{dt}$ par $\frac{dR}{dc}$, ou $\frac{dR}{dl}n$,

$$\frac{dl}{dt} = n + n\frac{dc}{dt} + n(t+c)\frac{dR}{dl}\frac{dn}{dC};$$

ou bien, en remettant pour $\frac{dc}{dt}$ la valeur trouvée précédemment, il vient

$$\frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{dR}{dC}\right);$$

dans cette expression de $\frac{dl}{dt}$, le temps ne sortira plus des signes sin ou cos. Les deux équations

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dR}{dc}, \quad \frac{dc}{dt} = -\frac{dR}{dC}$$

se trouvent donc remplacées par les deux suivantes

$$(11) \qquad \frac{dC}{dt} = n\frac{dR}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{dR}{dC}\right).$$

Nos six éléments sont donc actuellement

$$C, \ G, \ H, \ l, \ g, \ h.$$

Mais les deux équations (11) n'ont plus la forme canonique; nous les y ramènerons en posant

$$\frac{dC}{n} = dL,$$

L étant une nouvelle variable. On peut écrire cette équation

$$dL = \sqrt{\mu}\frac{da}{2\sqrt{a}}, \quad \text{d'où} \quad L = \sqrt{\mu a},$$

et les deux équations (11) deviennent

$$(11 \textit{ bis}) \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = n - \frac{dR}{dL};$$

la dérivée partielle $\frac{dR}{dL}$ doit être prise sans faire varier L ou a sous les signes sin et cos; mais c'est une chose déjà entendue, puisque partout on a remplacé $n(t+c)$ par l.

Si l'on pose enfin

$$R = R' + C,$$

on aura

$$\frac{dR'}{dL} = \frac{dR}{dL} - \frac{dC}{dL} = \frac{dR}{dL} - n;$$

on aura, en outre,

$$\frac{dR'}{dl} = \frac{dR}{dl},$$

et les deux équations (11 *bis*) deviendront

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dR'}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR'}{dL}.$$

En résumé, les formules (10) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{dR}{dL}; \\ \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{dR}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{dR}{dG}; \\ \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{dR}{dh}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{dR}{dH}; \end{cases}$$

la fonction R est égale à l'ancienne diminuée de C, ou bien augmentée de $\frac{\mu}{2a}$. Toute la question consiste actuellement dans l'intégration des équations (12).

§ IV. — *Forme du développement de* R. — *Aperçu sommaire de la méthode de M. Delaunay.*

Le développement ordinaire de la fonction perturbatrice, celui qui est donné dans la *Mécanique céleste*, se compose de termes tels que

$$A \cos \theta,$$

où θ est de la forme

$$il + i'l' + j\varpi + j'\varpi' + k\theta + k'\theta',$$

i, i', j, j', k, k' étant des nombres entiers, l la longitude moyenne de

la Lune, l' celle du Soleil; ϖ et θ sont les longitudes du périgée et du nœud de l'orbite de la Lune, ϖ' et θ' les quantités analogues pour l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre.

Dans la théorie actuelle, on devra remplacer

$$l \text{ par } h+g+l, \quad \varpi \text{ par } h+g, \quad \theta \text{ par } h;$$

on considérera, du reste, les éléments du Soleil comme des constantes, de telle sorte que si n' désigne le moyen mouvement du Soleil, θ sera de la forme

$$\theta = il + i'g + i''h + i'''n't + q,$$

q étant une constante.

A, dans la théorie ordinaire, est une fonction de a, e et i; on fera ici

$$\gamma = \sin\frac{i}{2}, \quad \text{d'où} \quad \sin i = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}, \quad \cos i = 1 - 2\gamma^2.$$

On gardera les éléments a, e et γ dans A, afin de pouvoir juger plus facilement de l'ordre du terme considéré; mais on devra se rappeler que ces éléments sont liés à L, G, H par les relations suivantes

$$a = \frac{L^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{H}{2G}}.$$

Mettons sous les yeux, pour plus de clarté, la partie constante de la fonction perturbatrice et un de ses termes périodiques :

$$\begin{aligned}
R = \frac{\mu}{2a} &+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4\right.\\
&\qquad\left. - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma'^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{9}{64}\frac{a^2}{a'^2}\right)\\
&+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{8}e'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4\right.\\
&\qquad\left. + \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{69}{64}e^4 + \frac{75}{16}e^2 e'^2 + \frac{5}{16}\frac{a^2}{a'^2}\right)\\
&\times \cos(2l + 2g + 2h - 2l' + q).
\end{aligned}$$

On a poussé le calcul jusqu'aux termes du quatrième ordre, en regardant $\frac{a}{a'}$ comme une quantité du second ordre; la constante q a pour

valeur

$$q = 2g' + 2h'.$$

On ne voit pas figurer dans les coefficients la quantité γ' relative au Soleil, ce qui tient à ce qu'on a pris pour plan fixe des xy le plan de l'écliptique dont on néglige les variations.

Donnons en peu de mots le principe de la méthode de M. Delaunay.

On réduit la fonction perturbatrice à son terme constant et à un de ses termes périodiques; il arrive que les équations (12) peuvent s'intégrer rigoureusement, ce qui supprime les approximations successives relativement aux termes considérés. On peut se demander alors s'il ne serait pas possible de tirer parti de cette circonstance, et de ramener le problème à un autre du même genre, dans lequel la fonction perturbatrice contiendrait un terme de moins.

Ayant effectué les intégrations du cas précédent, on regarde les arbitraires de cette intégration comme de nouvelles variables, et il arrive que ces nouvelles variables dépendent d'équations de même forme que les précédentes; seulement, la fonction perturbatrice ne contient plus le terme périodique qu'on avait considéré. On conçoit donc la possibilité d'enlever de la fonction perturbatrice les termes les plus importants, après quoi on calculera l'effet des autres termes par la méthode ordinaire.

Considérons donc spécialement un terme périodique de la fonction perturbatrice, et sa partie non périodique, et posons

$$R = -B - A\cos(il + i'g + i''h + i'''n't + q) + R_1 :$$

nous allons négliger R_1 et intégrer les équations (12) dans cette hypothèse.

§ V. — *Intégration des équations* (12) *en négligeant* R_1.

On a donc

$$R = -B - A\cos\theta,$$

en posant, pour abréger,

$$\theta = il + i'g + i''h + i'''n't + q;$$

B et A sont des fonctions connues de L, G, H.

D'après le théorème II du § I, l'intégration des équations (12) dépend de la recherche d'une solution complète de l'équation aux dérivées partielles

$$(13)\quad \frac{dS}{dt} - B - A\cos\left(i\frac{dS}{dL} + i'\frac{dS}{dG} + i''\frac{dS}{dH} + i'''n't + q\right) = 0,$$

c'est-à-dire d'une solution avec trois constantes arbitraires.

Pour nous débarrasser du temps, désignons par C une constante arbitraire, par S_1 une simple fonction de L, G, H, et posons

$$(14)\qquad S = Ct - \frac{i'''}{i}n'tL - \frac{q}{i}L + S_1.$$

L'équation (13) deviendra

$$C - \frac{i'''}{i}n'L - B = A\cos\left(i\frac{dS_1}{dL} + i'\frac{dS_1}{dG} + i''\frac{dS_1}{dH}\right),$$

ou, en faisant

$$B_1 = B + \frac{i'''}{i}n'L,$$

$$(13\ bis)\qquad i\frac{dS_1}{dL} + i'\frac{dS_1}{dG} + i''\frac{dS_1}{dH} = \arccos\frac{C - B_1}{A}:$$

le second membre de cette équation est une fonction de L, G, H et de la constante C, et nous avons à trouver une solution de cette équation avec deux constantes arbitraires.

A la place des variables G et H, introduisons les nouvelles variables (G) et (H) définies par les équations

$$(15)\qquad G = \frac{i'}{i}L + (G),\quad H = \frac{i''}{i}L + (H).$$

S_1 deviendra une fonction de L, (G), (H), ainsi que le second membre de l'équation (13 *bis*); on voit immédiatement que le premier membre de cette équation sera $i\left(\frac{dS_1}{dL}\right)$, les parenthèses devant éviter de confondre la dérivée de S_1, prise par rapport à L dans l'hypothèse actuelle.

avec l'ancienne dérivée $\frac{dS_1}{dL}$; l'équation (13 *bis*) sera donc

$$i\left(\frac{dS_1}{dL}\right) = \arc\cos\frac{C - B_1}{A}; \tag{14}$$

elle ne contient pas les dérivées partielles de S_1 relatives aux variables (G) et (H); on aura donc

$$S_1 = \int \arc\cos\frac{C - B_1}{A}\frac{dL}{i} + \text{une fonction arbitraire de (G) et (H)};$$

nous ferons, en désignant par (g) et (h) deux nouvelles constantes arbitraires,

$$S_1 = \int \arc\cos\frac{C - B_1}{A}\frac{dL}{i} + (g)(G) + (h)(H).$$

L'intégrale qui figure dans l'expression précédente de S_1 est une fonction de L, (G), (H) et de la constante C. Désignons-la par

$$K[L, (G), (H), C],$$

de telle sorte que

$$K[L, (G), (H), C] = \int \arc\cos\frac{C - B_1}{A}\frac{dL}{i};$$

on aura alors, en se reportant à l'équation (14),

$$S = Ct - \frac{i'''}{i}n't\,L - \frac{q}{i}L + K[L, (G), (H), C] + (g)(G) + (h)(H),$$

ou bien, en revenant aux anciennes variables (G) et (H), par les formules (15),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} S = Ct - \frac{i'''}{i}n't\,L - \frac{q}{i}L + K\left[L, G - \frac{i'}{i}L, H - \frac{i''}{i}L, C\right] \\ + (g)\left(G - \frac{i'}{i}L\right) + (h)\left(H - \frac{i''}{i}L\right). \end{aligned}\right.$$

Telle est la solution complète de l'équation (13) que nous cherchions : elle contient les trois constantes arbitraires C, (g) et (h).

D'après le théorème II du § I, les intégrales des équations (12)

seront données par les formules suivantes :

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dS}{dC} = -c, & \dfrac{dS}{d(g)} = \text{const.}, & \dfrac{dS}{d(h)} = \text{const.}, \\ \dfrac{dS}{dL} = l, & \dfrac{dS}{dG} = g, & \dfrac{dS}{dH} = h, \end{array}\right.$$

c désignant une nouvelle constante.

La deuxième et la troisième de ces formules montrent que (G) et (H) sont des constantes. Nous continuerons à les désigner par les mêmes lettres : la première donne, en ayant égard à la valeur (16) de S_1,

$$-(t+c) = \frac{dK}{dC};$$

la dernière et l'avant-dernière donnent

$$g = (g) + \frac{dK}{d(G)}, \quad h = (h) + \frac{dK}{d(H)}.$$

On suppose dans ces formules la fonction K exprimée à l'aide de L et des trois constantes (G), (H), C.

Enfin la quatrième des équations (17) revient, comme on s'en assure aisément, à

$$il + i'g + i''h + i'''n't + q = \theta = i\frac{dK}{dL}.$$

Les intégrales des équations (12) seront donc

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{c} G = \dfrac{i'}{i}L + (G), \quad H = \dfrac{i''}{i}L + (H), \\ -(t+c) = \dfrac{dK}{dC}, \quad g = (g) + \dfrac{dK}{d(G)}, \quad h = (h) + \dfrac{dK}{d(H)}, \\ \theta = il + i'g + i''h + i'''n't + q = i\dfrac{dK}{dL}; \end{array}\right.$$

elles contiennent les six constantes arbitraires C, (G), (H), c, (g), (h); il faut se rappeler que la fonction K est définie par la formule

$$K = \int \arc\cos\frac{C - B_1}{A}\,\frac{dL}{i}.$$

et il est à peine nécessaire d'ajouter que, dans l'élément différentiel, G et H doivent être remplacés par leurs valeurs tirées des deux premières formules (18).

Ces formules (18) déterminent donc nos six variables L, G, H, l, g, h en fonction du temps et des six constantes C, (G), (H), c, (g), (h); la troisième formule donne L, après quoi la première et la seconde donnent G et H; la quatrième et la cinquième donnent g et h; enfin la dernière donne l.

§ VI. — *Variation des arbitraires introduites par l'intégration précédente.*

Revenons aux équations (12) et rétablissons-y R_1. Posons donc

$$R = -B - A\cos\theta + R_1.$$

Les expressions de L, G, H, l, g, h seront encore celles qui sont données par les formules (18); seulement les arbitraires seront de nouvelles variables. Comme nous avons intégré en suivant la méthode de Jacobi, nous pourrons, en appliquant le théorème III du § I, former très-aisément les équations d'où dépendent les dérivées des nouvelles variables.

Remarquons, à cet effet, que les quantités désignées par α dans le théorème cité sont ici

$$C,\ (g),\ (h);$$

les quantités désignées par β sont

$$-c,\ (G),\ (H);$$

enfin, la fonction V doit être remplacée par $-R_1$. Nous aurons donc ces équations

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dR_1}{dc}, & \frac{dc}{dt} &= -\frac{dR_1}{dC};\\ \frac{d(G)}{dt} &= \frac{dR_1}{d(g)}, & \frac{d(g)}{dt} &= -\frac{dR_1}{d(G)};\\ \frac{d(H)}{dt} &= \frac{dR_1}{d(h)}, & \frac{d(h)}{dt} &= -\frac{dR_1}{d(H)}. \end{aligned}\right.$$

La fonction R_1, qui dépendait primitivement de L, G, H, l, g, h, est supposée maintenant exprimée en fonction du temps t, et des six constantes C, (G), (H), c, (g), (h) d'après les formules (18).

On voit donc que les nouvelles variables dépendent d'équations (19) toutes pareilles aux équations (12); seulement R y est remplacé par R_1. On a enlevé de la fonction perturbatrice la partie $-B-A\cos\theta$.

Avant d'aller plus loin, il convient d'examiner sous quelle forme se présentera la fonction R_1, comme nous l'avons fait à l'égard de R au § IV, et pour cela il faut commencer par examiner les expressions de L, G, H, l, g, h fournies par les équations (18).

Reprenons la formule

$$-(t+c) = \frac{dK}{dC},$$

qui devient, en remplaçant K par sa valeur,

$$(20) \qquad t + c = \int \frac{\frac{dL}{i}}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}};$$

d'où

$$(21) \qquad \frac{1}{i}\frac{dL}{dt} = \sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}.$$

Comme on a $L = \sqrt{\mu a}$, et que a varie entre certaines limites, il en est de même de L : cette quantité oscille entre deux limites, et chaque fois qu'elle atteint une de ces limites, on a $\frac{dL}{dt} = 0$. Soient donc $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ les deux limites de L : la première limite sera donnée par l'équation $C - B_1 = +A$, et la seconde par l'équation $C - B_1 = -A$.

Convenons que la limite inférieure de l'intégrale K soit $\mathcal{L}'$; cette limite sera une certaine fonction de C, (G), (H), et il n'y aura pas à craindre que cela change les dérivées partielles

$$\frac{dK}{dC}, \quad \frac{dK}{d(G)}, \quad \frac{dK}{d(H)},$$

car l'élément différentiel de K s'annule pour $\mathcal{L}'$.

Cela posé, la formule (20) montre que pour $L = \mathcal{L}'$ on a

$$t + c = 0;$$

en outre, si l'on pose

$$\frac{\pi}{\theta_0} = \int_{\mathfrak{L}'}^{\mathfrak{L}''} \frac{dL}{i\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}},$$

on aura, pour $L = \mathfrak{L}''$,

$$t + c = \frac{\pi}{\theta_0}.$$

Quand L a atteint la valeur $\mathfrak{L}''$, il revient vers $\mathfrak{L}'$; dL est négative, le signe du radical $\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}$ change : pour $L = \mathfrak{L}'$, on aura

$$t + c = \frac{2\pi}{\theta_0};$$

pour $L = \mathfrak{L}''$, on aura

$$t + c = \frac{3\pi}{\theta_0}.$$

Donc L est une fonction périodique de $t + c$, et la période est $\frac{2\pi}{\theta_0}$, ou bien L est une fonction périodique de $\theta_0(t + c)$, et la période est 2π. On sait qu'une pareille fonction est développable en une série de sinus et cosinus des multiples de l'angle $\theta_0(t + c)$. Du reste, on voit aisément qu'à des valeurs de L, équidistantes de $\mathfrak{L}''$, répondent des valeurs de $t + c$ de la forme

$$\frac{\pi}{\theta_0} - \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\theta_0} + \alpha,$$

ou bien des valeurs de $\theta_0(t + c)$ de la forme

$$\pi - \beta \quad \text{et} \quad \pi + \beta.$$

Lors donc que $\theta_0(t + c)$ prend deux semblables valeurs, L doit rester le même, ce qui exige que L ne contienne que des cosinus; ainsi son expression est de la forme

$$L = L_0 + L_1 \cos\theta_0(t + c) + L_2 \cos 2\theta_0(t + c) + \ldots$$

Les deux premières formules (18) montrent que l'on aura

$$G = G_0 + G_1 \cos\theta_0(t+c) + G_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \ldots,$$
$$H = H_0 + H_1 \cos\theta_0(t+c) + H_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \ldots,$$

avec les relations

$$G_0 = \frac{i'}{i} L_0 + (G), \quad G_1 = \frac{i'}{i} L_1, \quad G_2 = \frac{i'}{i} L_2;$$

$$H_0 = \frac{i''}{i} L_0 + (H), \quad H_1 = \frac{i''}{i} L_1, \quad H_2 = \frac{i''}{i} L_2.$$

On a ainsi les développements de L, G, H, dans lesquels θ_0, L_0, $L_1, \ldots$, expriment des fonctions de C, (G), (H).

De même, on a

$$g = (g) + \frac{dK}{d(G)} = (g) + \int \left[\frac{dA}{d(G)} \frac{C - B_1}{A} + \frac{dB_1}{d(G)} \right] \frac{dL}{i\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}},$$

ou bien, en remplaçant dL par sa valeur tirée de la formule (21),

$$g = (g) + \int \left[\frac{dA}{d(G)} \frac{C - B_1}{A} + \frac{dB_1}{d(G)} \right] dt.$$

Or l'élément différentiel est une simple fonction de L, par conséquent développable en série de cosinus des multiples de l'angle $\theta_0(t+c)$; en intégrant, on en tirera

$$g = (g) + g_0(t+c) + g_1 \sin\theta_0(t+c) + g_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \ldots.$$

On n'a pas de constante à ajouter, car, pour $L = \mathfrak{L}'$, on a $t + c = 0$ et $g = (g)$, d'après la manière dont on a fixé la limite inférieure de l'intégrale K.

On aura de même

$$h = (h) + h_0(t+c) + h_1 \sin\theta_0(t+c) + h_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \ldots.$$

Quant à la variable θ, l'équation

$$\theta = \text{arc} \cos \frac{C - B_1}{A}$$

donne

$$\frac{d\theta}{dt} = i\left(\frac{dB_1}{dL} + \frac{C - B_1}{A}\frac{dA}{dL}\right);$$

on aura donc de même

$$\theta = \alpha(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \theta_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \ldots,$$

α, θ_1, $\theta_2, \ldots$, désignant de certaines fonctions de C, (G), (H).

Or pour $L = \mathfrak{L}'$, on a

$$C - B_1 = +A, \quad \cos\theta = +1, \quad t + c = 0;$$

et pour $L = \mathfrak{L}''$,

$$C - B_1 = -A, \quad \cos\theta = -1, \quad t + c = \frac{\pi}{\theta_0}.$$

L'angle θ, de sa nature, augmentant sans cesse, on voit que pour $t + c = 0$, on a

$$\theta = 0,$$

et pour $t + c = \frac{\pi}{\theta_0}$,

$$\theta = \pi,$$

ce qui suffit pour montrer que dans la formule précédente α est égal à θ_0, et qu'il n'y a pas de constante à ajouter à θ.

Si l'on reporte les valeurs précédentes dans l'équation

$$il + i'g + i''h + i'''n't + q = \theta,$$

on aura pour l une expression telle que

$$l = (l) + l_0(t+c) + l_1 \sin\theta_0(t+c) + l_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \ldots,$$

avec les relations

$$i(l) + i'(g) + i''(h) - i'''n'c + q = 0,$$
$$il_0 + i'g_0 + i''h_0 + i'''n' = \theta_0,$$
$$il_1 + i'g_1 + i''h_1 = \theta_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut comprendre les résultats qui précèdent dans le tableau suivant :

$$(22)\quad \begin{cases} L = L_0 + L_1 \cos\theta_0(t+c) + \ldots, \\ G = G_0 + G_1 \cos\theta_0(t+c) + \ldots, \\ H = H_0 + H_1 \cos\theta_0(t+c) + \ldots, \\ l = (l) + l_0(t+c) + l_1 \sin\theta_0(t+c) + \ldots. \\ g = (g) + g_0(t+c) + g_1 \sin\theta_0(t+c) + \ldots, \\ h = (h) + h_0(t+c) + h_1 \sin\theta_0(t+c) + \ldots. \\ \theta = \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \ldots, \\ G_0 = \frac{i'}{i} L_0 + (G), \quad G_1 = \frac{i'}{i} L_1, \ldots, \\ H_0 = \frac{i''}{i} L_0 + (H), \quad H_1 = \frac{i''}{i} L_1, \ldots, \\ i(l) + i'(g) + i''(h) - i'''n'c + q = 0, \\ il_0 + i'g_0 + i''h_0 + i'''n' = \theta_0, \\ il_1 + i'g_1 + i''h_1 = \theta_1. \end{cases}$$

les coefficients $\theta_0, \ldots, g_0, \ldots, h_0, \ldots, l_0, \ldots, G_0, \ldots, H_0, \ldots, L_0, \ldots$ sont des fonctions des arbitraires C, (G) et (H).

§ VII. — *Nouveau changement d'arbitraires.*

On aura à substituer les valeurs précédentes de L, G, H, l, g, h dans la fonction R_1. Les cosinus tels que $\cos(il + i'g' + i''h + i'''n't + q)$ seront développés en série par la formule de Taylor, et on voit ainsi que l'un quelconque des termes de R_1 sera de la forme

$$A \cos \{ i[(l) + l_0(t+c)] + i'[(g) + g_0(t+c)] \\ + i''[(h) + h_0(t+c)] + i'''n'(t+c) + q \}.$$

Mais, quand on voudra appliquer les formules (19), comme l_0, g_0,

h_0 sont des fonctions de C, (G), (H), on voit que les dérivées partielles

$$\frac{dR_1}{dC}, \quad \frac{dR_1}{d(G)}, \quad \frac{dR_1}{d(H)}$$

feront sortir le temps des signes sin et cos, ce qui est un grave inconvénient. Nous l'éviterons en substituant aux arbitraires C, (G), (H), c, (g), (h) de nouvelles quantités convenablement choisies. Nous choisirons ces arbitraires de façon que le temps ne sorte plus des signes sin et cos, et que les équations aient encore la forme canonique. Avant d'aller plus loin, faisons subir aux équations (19) une légère transformation, en remplaçant la quantité c par la variable τ, telle que l'on ait

$$t + c = \tau;$$

on aura

$$1 + \frac{dc}{dt} = \frac{d\tau}{dt}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{dR_1}{dC}.$$

Si donc on pose $R_1 - C = R'$, on aura

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{dR'}{dC};$$

on a, du reste,

$$\frac{dR_1}{dc} = \frac{dR'}{d\tau};$$

les équations (19) seront donc

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{dR'}{d\tau}, & \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{dR'}{dC}, \\ \frac{d(G)}{dt} &= \frac{dR'}{d(g)}, & \frac{d(g)}{dt} &= -\frac{dR'}{d(G)}, \\ \frac{d(H)}{dt} &= \frac{dR'}{d(h)}, & \frac{d(h)}{dt} &= -\frac{dR'}{d(H)}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, afin de découvrir les nouvelles arbitraires, nous reviendrons aux expressions (22) de θ, l, g, h, pour établir entre les coefficients θ_0, l_0, g_0, h_0 des relations qui nous seront de la plus grande

utilité. Reprenons l'intégrale

$$A\cos\theta + B_1 = C \quad \text{ou} \quad A\cos\theta + B + \frac{i'''}{i} n'L = C,$$

ou enfin

$$C = -R + \frac{i'''}{i} n'L.$$

Cette équation doit devenir une identité, si l'on y remplace L, G,... par leurs valeurs (22), et cela quelles que soient les quantités C, (G), (H), τ, (g), (h); on peut donc différentier la précédente équation par rapport à ces quantités; servons-nous de la caractéristique δ, pour indiquer cette différentiation, et nous aurons

$$\delta C = -\delta R + \frac{i'''}{i} n'\delta L,$$

ou, comme R est une fonction de L, G, H, l, g, h,

$$\delta C = \frac{i'''}{i} n'\delta L - \left(\frac{dR}{dL}\delta L + \frac{dR}{dl}\delta l\right) - \left(\frac{dR}{dG}\delta G + \frac{dR}{dg}\delta g\right) - \left(\frac{dR}{dH}\delta H + \frac{dR}{dh}\delta h\right).$$

Or, si l'on remplace les dérivées partielles $\frac{dR}{dL}$, $\frac{dR}{dl}$, $\cdots$ par leurs valeurs tirées des formules (12),

$$\frac{dR}{dL} = -\frac{dl}{dt}, \quad \frac{dR}{dl} = \frac{dL}{dt},$$

il viendra

$$\delta C = \frac{i'''}{i} n'\delta L + \left(\frac{dl}{dt}\delta L - \frac{dL}{dt}\delta l\right) + \left(\frac{dg}{dt}\delta G - \frac{dG}{dt}\delta g\right) + \left(\frac{dh}{dt}\delta H - \frac{dH}{dt}\delta h\right),$$

ou, en remplaçant G et H par leurs valeurs (18),

$$\delta C = \frac{\delta L}{i}\left(i\frac{dl}{dt} + i'\frac{dg}{dt} + i''\frac{dh}{dt} + i'''n'\right) - \frac{1}{i}\frac{dL}{dt}(i\delta l + i'\delta g + i''\delta h) + \frac{dg}{dt}\delta(G) + \frac{dh}{dt}\delta(H),$$

ou enfin, en introduisant θ,

$$\delta C = \frac{d\theta\,\delta L - \delta\theta\,dL}{i\,dt} + \frac{dg}{dt}\delta(G) + \frac{dh}{dt}\delta(H). \tag{24}$$

Or les expressions de L et θ,

$$L = L_0 + L_1\cos\theta_0\tau + L_2\cos2\theta_0\tau + \ldots,$$
$$\theta = \theta_0\tau + \theta_1\sin\theta_0\tau + \theta_2\sin2\theta_0\tau + \ldots,$$

montrent que l'équation (24) sera de la forme

$$\begin{aligned}&\alpha + \beta_1\cos\theta_0\tau + \beta_2\cos2\theta_0\tau + \ldots + \gamma_1\sin\theta_0\tau\\ &\quad + \gamma_2\sin2\theta_0\tau + \ldots + \tau(\delta_1\sin\theta_0\tau + \delta_2\sin2\theta_0\tau + \ldots) = 0;\end{aligned}$$

cette équation devant avoir lieu quel que soit τ, on en tire évidemment

$$\alpha = 0,\quad \beta_1 = 0,\ldots.$$

C'est la première de ces relations qui nous sera utile. Formons donc la partie non périodique et indépendante de τ dans l'équation (24); le terme

$$\frac{d\theta}{dt}\delta L$$

ou

$$\begin{aligned}&[\theta_0 + \theta_0(\theta_1\cos\theta_0\tau + 2\theta_2\cos2\theta_0\tau + \ldots)]\\ &\quad\times(\delta L_0 + \delta L_1\cos\theta_0\tau + \delta L_2\cos2\theta_0\tau - \ldots)\end{aligned}$$

donne, comme on le voit immédiatement,

$$\theta_0\left(\delta L_0 + \frac{\theta_1\,\delta L_1 + 2\theta_2\,\delta L_2 + 3\theta_3\,\delta L_3 + \ldots}{2}\right),$$

de même le terme $-\frac{dL}{dt}\delta\theta$ donne

$$\theta_0\left(\frac{L_1\,\delta\theta_1 + 2L_2\,\delta\theta_2 + 3L_3\,\delta\theta_3 + \ldots}{2}\right).$$

Quant au terme $\frac{dg}{dt}\delta(G)$, il doit être réduit à $g_0\delta(G)$, et de même

$\frac{dh}{dt}\,\partial(G)$, à $h_0\,\partial(H)$; l'équation $\alpha = 0$ est donc

$$\partial C = \theta_0\,\partial\left[\frac{L_0 + \frac{1}{2}(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots)}{i}\right] + g_0\,\partial(G) + h_0\,\partial(H),$$

ou, en faisant

$$(25)\qquad \Lambda = \frac{L_0 + \frac{1}{2}(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots)}{i},$$

$$(26)\qquad \partial C = \theta_0\,\partial\Lambda + g_0\,\partial(G) + h_0\,\partial(H).$$

Or, Λ est une fonction de C, (G), (H), et inversement, C peut être regardé comme une fonction de Λ, (G), (H); l'équation (26) montre qu'on a, dans cette hypothèse,

$$(27)\qquad \theta_0 = \frac{dC}{d\Lambda},\quad g_0 = \frac{dC}{d(G)},\quad h_0 = \frac{dC}{d(H)},$$

θ_0, g_0 et h_0 sont donc les dérivées partielles d'une même fonction, relativement aux quantités Λ, (G), (H).

Cherchons à exprimer l_0 de la même manière.

L'équation qui lie l_0, θ_0, g_0 et h_0 est

$$il_0 + i'g_0 + i''h_0 + i'''n' = \theta_0;$$

on aura donc, en tenant compte des relations (27),

$$(28)\qquad il_0 + i'''n' = \frac{dC}{d\Lambda} - i'\frac{dC}{d(G)} - i''\frac{dC}{d(H)}.$$

Or, il est facile de faire en sorte que le second membre de cette formule soit aussi une dérivée partielle de C; il suffit de remplacer Λ, (G), (H) par les quantités Λ', G', H' définies comme il suit

$$(29)\qquad \Lambda = \frac{1}{i}\Lambda',\quad (G) = G' - \frac{i'}{i}\Lambda',\quad (H) = H' - \frac{i''}{i}\Lambda';$$

C va devenir une fonction de Λ', G' et H', et on aura évidemment

$$\frac{dC}{d\Lambda'} = \frac{1}{i}\frac{dC}{d\Lambda} - \frac{i'}{i}\frac{dC}{d(G)} - \frac{i''}{i}\frac{dC}{d(H)},$$

$$\frac{dC}{dG'} = \frac{dC}{d(G)}, \quad \frac{dC}{dH'} = \frac{dC}{d(H)}.$$

Donc, l'expression (28) de l_0, et les expressions (27) de g_0 et h_0 vont devenir

$$(30)\quad \begin{cases} l_0 + \dfrac{i'''}{i} n' = \dfrac{dC}{d\Lambda'}, \\ g_0 = \dfrac{dC}{dG'}, \\ h_0 = \dfrac{dC}{dH'}; \end{cases}$$

voilà les relations auxquelles nous voulions arriver.

Nous allons maintenant pouvoir appliquer le théorème IV du § I; nous avions le système d'éléments canoniques

$$C, \quad (G), \quad (H), \quad \tau, \quad (g), \quad (h),$$

nous voulons en déduire un nouveau système également canonique, d'après le théorème cité. Trois de ces nouveaux éléments seront Λ', G', H', et nous prendrons, pour la fonction ψ,

$$(31)\qquad \psi = C\tau - \left[\frac{i'}{i}(g) + \frac{i''}{i}(h) + \frac{q}{i}\right]\Lambda' + (g)G' + (h)H'.$$

Dans cette formule C doit être supposé remplacé par sa valeur en fonction de Λ', G', H'; les éléments α sont

$$\tau, \quad (g), \quad (h),$$

les éléments α' sont

$$\Lambda', \quad G', \quad H';$$

on trouve aisément

$$\frac{d\psi}{d\tau} = C, \quad \frac{d\psi}{d(g)} = G' - \frac{i'}{i}\Lambda', \quad \frac{d\psi}{d(h)} = H' - \frac{i''}{i}\Lambda',$$

ou, en ayant égard à la définition de Λ', G', H',

$$\frac{d\psi}{d\tau} = C, \quad \frac{d\psi}{d(g)} = (G), \quad \frac{d\psi}{d(h)} = (H):$$

ce sont bien les équations

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\psi}{d\alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{d\psi}{d\alpha_3} = \beta_3$$

du théorème cité.

Pour avoir les éléments β', il suffira de former les dérivées

$$\frac{d\psi}{d\Lambda'}, \quad \frac{d\psi}{dG'}, \quad \frac{d\psi}{dH'};$$

on trouve, en ayant égard aux formules (30),

$$\frac{d\psi}{d\Lambda'} = \tau\frac{dC}{d\Lambda'} - \frac{i'}{i}(g) - \frac{i''}{i}(h) - \frac{q}{i} = \tau l_0 + \frac{i'''}{i}n'\tau - \frac{i'}{i}(g) - \frac{i''}{i}(h) - \frac{q}{i},$$

$$\frac{d\psi}{dG'} = (g) + g_0\tau,$$

$$\frac{d\psi}{dH'} = (h) + h_0\tau.$$

Si l'on a égard à la valeur de (l), on pourra écrire

$$\frac{d\psi}{d\Lambda'} = (l) + l_0\tau + \frac{i'''}{i}n't.$$

Désignons ces nouveaux éléments par λ, $\varkappa$, η, de façon que

$$\lambda = (l) + l_0\tau + \frac{i'''}{i}n't,$$
$$\varkappa = (g) + g_0\tau,$$
$$\eta = (h) + h_0\tau.$$

Le systeme Λ', G', H', λ, $\varkappa$, η sera canonique, c'est-à-dire qu'on

aura

$$\frac{d\Lambda'}{dt} = \frac{dR'}{d\lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dR'}{d\Lambda'};$$
$$\frac{dG'}{dt} = \frac{dR'}{d\varkappa}, \quad \frac{d\varkappa}{dt} = -\frac{dR'}{dG'};$$
$$\frac{dH'}{dt} = \frac{dR'}{d\eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dR'}{dH'}.$$

On voit que les éléments $\varkappa$ et η sont les parties non périodiques des expressions (22) de g et h; λ est la partie non périodique λ' de l augmentée de $\frac{i'''}{i}n't$; posons donc

$$\lambda = \lambda' + \frac{i'''}{i}n't,$$

nous aurons

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{i'''}{i}n' = -\frac{i'''}{i}n' - \frac{dR'}{d\Lambda'}.$$

On ramènera cette équation à la forme canonique, en faisant

$$R'' = R' + \frac{i'''}{i}n'\Lambda',$$

et l'on aura ainsi les équations canoniques

$$(32) \quad \begin{cases} \dfrac{d\Lambda'}{dt} = \dfrac{dR''}{d\lambda'}, & \dfrac{d\lambda'}{dt} = -\dfrac{dR''}{d\Lambda'}, \\ \dfrac{dG'}{dt} = \dfrac{dR''}{d\varkappa}, & \dfrac{d\varkappa}{dt} = -\dfrac{dR''}{dG'}, \\ \dfrac{dH'}{dt} = \dfrac{dR''}{d\eta}, & \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{dR''}{dH'}. \end{cases}$$

Les relations qui lient les deux systèmes d'éléments sont les suivantes

$$\Lambda' = i\Lambda = L_0 + \frac{1}{2}(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots),$$

$$G' = (G) + \frac{i'}{i}\Lambda',$$

$$H' = (H) + \frac{i''}{i}\Lambda',$$

ou bien

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
\Lambda' &= L_0 + \frac{1}{2}(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots),\\
G' &= G_0 + \frac{1}{2}(G_1\theta_1 + 2G_2\theta_2 + \ldots),\\
H' &= H_0 + \frac{1}{2}(H_1\theta_1 + 2H_2\theta_2 + \ldots),\\
\lambda' &= (l) + l_0(t+c),\\
\varkappa &= (g) + g_0(t+c),\\
\eta &= (h) + h_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

on a, du reste,

$$R'' = R' + \frac{i'''}{i}n'\Lambda' = R_1 - C + \frac{i'''}{i}n'\Lambda',$$

$$R'' = R_1 - C + \frac{i'''n'}{2i}(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots) + \frac{i'''}{i}n'L_0.$$

Les arbitraires Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η sont donc encore canoniques tout comme les précédentes, C, (G), (H), c, (g), (h); seulement elles ne présentent plus l'inconvénient dont on avait parlé, car un terme quelconque de la fonction perturbatrice sera de la forme

$$A\cos(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q),$$

puisque sous les signes cosinus on réduit les éléments l, g, h à leurs parties non périodiques. On voit que, en formant les dérivées partielles de ce terme, le temps ne pourra pas sortir des signes sinus et cosinus.

On voit de plus que le terme périodique $-A\cos\theta$ a bien disparu de la fonction perturbatrice; cette fonction a maintenant pour valeur

$$R'' = R_1 - C + \frac{1}{2}\frac{i'''}{i}n'(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots) + \frac{i'''}{i}n'L_0,$$

C devant y être remplacé par sa valeur, fonction de Λ', G' et H'; mais si le terme périodique $-A\cos\theta$ a disparu, la constante B de la fonction perturbatrice a été modifiée.

Remarque. — Les nouvelles variables Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η se réduisent aux anciennes L, G, H, l, g, h, quand on suppose nul le coefficient A du terme périodique considéré.

Si, en effet, on se reporte aux équations (12), on verra que dans cette hypothèse

$$\frac{dL}{dt}=0,\quad \frac{dG}{dt}=0,\quad \frac{dH}{dt}=0,$$

d'où

$$L=L_0,\quad L_1=0,\quad L_2=0,\ldots$$

et de même pour G et H; mais l'expression (33) de Λ' montre qu'on a aussi

$$\Lambda'=L_0.$$

Donc les variables Λ', G', H' se réduisent bien aux anciennes.

Les mêmes équations (12) donnent

$$\frac{dl}{dt}=-\frac{dR}{dL}=\frac{dB}{dL}=\text{const.},$$

d'où

$$l=(l)+\frac{dB}{dL}(t+c).$$

On a donc

$$l_0=\frac{dB}{dL},\quad l_1=0,\quad l_2=0,\ldots,$$

ce qui montre que la valeur précédente de l est aussi celle à laquelle se réduit λ.

On démontrerait la même chose pour g et h.

Nous pouvons tirer de là la règle pratique suivante : on a les expressions de L, G,...,

$$L=L_0+L_1\cos\theta_0(t+c)+\ldots,$$

. . . .

ou bien, à cause de la relation

$$\theta_0(t+c)=i\lambda'+i'\varkappa+i''\eta+i'''n't+q,$$

les relations qui lient les nouvelles variables aux anciennes seront

$$\begin{aligned}
L &= L_0 + L_1 \cos(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q) \\
&\quad + L_2 \cos 2\,(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q) + \ldots, \\
G &= G_0 + G_1 \cos(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q) + \ldots, \\
H &= H_0 + H_1 \cos(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q) + \ldots, \\
l &= \lambda' + l_1 \sin(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q) + \ldots, \\
g &= \varkappa + g_1 \sin(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q) + \ldots, \\
h &= \eta + h_1 \sin(i\lambda' + i'\varkappa + i''\eta + i'''n't + q) + \ldots.
\end{aligned}$$

Les coefficients $L_0, L_1, \ldots, G_0, G_1, \ldots, H_0, H_1, \ldots, l_1, \ldots, g_1, \ldots, h_1, \ldots,$ de ces formules, qui étaient d'abord des fonctions de C, (G), (H) sont maintenant des fonctions de A', G' et H'. On remplacera L, G, H, l, g, h par leurs valeurs dans les coordonnées de la Lune, qui deviendront ainsi des fonctions connues des nouvelles variables. Ces nouvelles variables dépendront d'équations pareilles aux premières, à cela près que la fonction perturbatrice aura été débarrassée d'un de ses termes périodiques : on pourra la débarrasser d'un nouveau terme, et continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait enlevé les parties les plus importantes.

Il est inutile d'introduire de nouvelles lettres pour désigner les nouvelles variables; on peut dire que, dans les coordonnées de la Lune, on remplacera :

$$L \quad \text{par} \quad L_0 + L_1 \cos(il + i'g + i''h + i'''n't + q) + \ldots,$$

de même pour G et H;

$$l \quad \text{par} \quad l + l_1 \sin(il + i'g + i''h + i'''n't + q) + \ldots,$$

de même pour g et h.

Les coefficients de ces formules sont des fonctions connues de C, (G), (H); ils sont donnés en fonction de A', G' et H' ou L, G, H par les formules suivantes

$$L = L_0 + \frac{1}{2}(L_1 \theta_1 + 2 L_2 \theta_2 + \ldots),$$

$$G = G_0 + \frac{1}{2}(G_1 \theta_1 + 2 G_2 \theta_2 + \ldots),$$

$$H = H_0 + \frac{1}{2}(H_1 \theta_1 + 2 H_2 \theta_2 + \ldots).$$

Les L_0, L_1... deviendront donc des fonctions connues de L, G, H; on aura alors les mêmes équations

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

seulement par R, il faudra entendre

$$R - \frac{i'''}{i} n'L + \frac{i''}{i} n'\Lambda',$$

ou bien

$$R - \frac{i'''}{i} n'(L - L_0) + \frac{1}{2}\frac{i'''}{i} n'(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots),$$

R étant la valeur primitive.

Remarque I. — La méthode suivie suppose le coefficient i de l dans l'argument θ différent de zéro; si ce coefficient était nul, i'' étant différent de zéro, on ferait jouer à G le rôle de L. La méthode ne se trouverait en défaut que dans le cas où i, i', i'' seraient nuls tous les trois; on peut alors intégrer aisément les équations (12); je ne m'arrêterai pas à ce cas.

Remarque II. — Quand on a fait disparaître un terme de la fonction perturbatrice, en remplaçant dans les autres L, G, H par leurs développements en séries, on introduit en général dans la fonction perturbatrice des termes qui ne s'y trouvaient pas; mais ces termes sont d'un ordre supérieur au terme considéré. Il peut même arriver qu'un terme qu'on avait fait disparaître reparaisse au bout d'un certain nombre d'opérations; mais alors ce terme sera nécessairement d'un ordre plus élevé.

Quand on aura ainsi fait disparaître les termes les plus importants de la fonction perturbatrice, on pourra, pour les autres, procéder comme dans la théorie des planètes et supprimer les approximations successives.

DEUXIÈME PARTIE.

§ I. — *Formules relatives aux actions mutuelles de deux planètes.*

Le mouvement de la Lune autour de la Terre est un cas particulier du problème des Trois Corps; à cause de la petitesse de la masse de la Lune relativement à celle du Soleil, la Terre se meut à très-peu près comme si elle existait seule avec le Soleil; son mouvement est à très-peu près elliptique. Aussi M. Delaunay, dans sa théorie, a-t-il pu supposer invariables les éléments de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, en se réservant d'ailleurs de tenir compte ultérieurement, et par la méthode ordinaire, des perturbations de ce mouvement dues à l'action de la Lune.

Nous allons considérer actuellement le mouvement de deux planètes autour du Soleil, de Jupiter et de Saturne, par exemple : les perturbations de ces deux planètes seront tout à fait comparables, et le problème se présentera sous un aspect tout différent. Nous montrerons cependant que la méthode de M. Delaunay peut être étendue à ce cas, et qu'elle peut servir à la détermination des perturbations réciproques des deux planètes, ou plutôt de la partie la plus importante de ces perturbations. On verra que les formules ressemblent tout à fait à celles de la première Partie et qu'elles sont même plus symétriques.

Considérant donc deux planètes, et conservant les notations de la première Partie, nous aurons les douze équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}, & \dfrac{dl}{dt} = n - \dfrac{dR}{dL}; & \dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{dR'}{dl'}, & \dfrac{dl'}{dt} = n' - \dfrac{dR'}{dL'}; \\[2ex] \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{dR}{dg}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{dR}{dG}; & \dfrac{dG'}{dt} = \dfrac{dR'}{dg'}, & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{dR'}{dG'}; \\[2ex] \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{dR}{dh}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{dR}{dH}; & \dfrac{dH'}{dt} = \dfrac{dR'}{dh'}, & \dfrac{dh'}{dt} = -\dfrac{dR'}{dH'}. \end{cases}$$

Les fonctions perturbatrices R et R′ ont les valeurs suivantes :

$$R = m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right), \qquad R' = m\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\right).$$

Nous réduirons ces deux fonctions à leurs premières parties :

$$(2)\qquad R = m'\frac{1}{\Delta},\quad R' = m\frac{1}{\Delta},$$

et nous intégrerons dans cette hypothèse les équations (1), considérées comme simultanées.

Les équations (2) donnent

$$R' = \frac{m}{m'}R,$$

ce qui permet d'introduire partout la fonction R; en faisant ce petit changement, nous nous arrangerons de telle sorte, que toutes les équations (1) soient canoniques. Il nous suffira de poser

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{R} = \frac{mm'}{\Delta} + m\frac{M+m}{2a} + m'\frac{M+m'}{2a'},\\ &\qquad\text{ou bien}\\ &\mathfrak{R} = mR + \frac{m\mu}{2a} + m'\frac{\mu'}{2a'}: \end{aligned}\right.$$

on trouvera facilement les relations suivantes :

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dl} = m\frac{dR}{dl},\quad \frac{d\mathfrak{R}}{dL} = m\left(\frac{dR}{dL} - n\right):\quad \frac{d\mathfrak{R}}{dl'} = m'\frac{dR'}{dl'},\quad \frac{d\mathfrak{R}}{dL'} = m'\left(\frac{dR'}{dL'} - n'\right);$$

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dg} = m\frac{dR}{dg},\quad \frac{d\mathfrak{R}}{dG} = m\frac{dR}{dG};\qquad \frac{d\mathfrak{R}}{dg'} = m'\frac{dR'}{dg'},\quad \frac{d\mathfrak{R}}{dG'} = m'\frac{dR'}{dG'};$$

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dh} = m\frac{dR}{dh},\quad \frac{d\mathfrak{R}}{dH} = m\frac{dR}{dH}:\qquad \frac{d\mathfrak{R}}{dh'} = m'\frac{dR'}{dh'},\quad \frac{d\mathfrak{R}}{dH'} = m'\frac{dR'}{dH'}.$$

Il sera facile dès lors de trouver ce que deviennent les équations (1); mais il convient de remplacer L, G, H, L′, G′, H′ respectivement par $\frac{L}{m}$, $\frac{G}{m}$, $\frac{H}{m}$, $\frac{L'}{m'}$, $\frac{G'}{m'}$, $\frac{H'}{m'}$, ce qui revient à poser

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= m\sqrt{\mu a}, & L' &= m'\sqrt{\mu' a'};\\ G &= m\sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2}, & G' &= m'\sqrt{\mu' a'}\sqrt{1-e'^2};\\ H &= m\sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2}\cos i, & H' &= m'\sqrt{\mu' a'}\sqrt{1-e'^2}\cos i'. \end{aligned}\right.$$

On verra alors les équations (1) se réduire à la forme canonique

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dl}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dL}; \quad \dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dl'}, \quad \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dL'}; \\ \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dg}; & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dG}; \quad \dfrac{dG'}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dg'}, \quad \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dG'}; \\ \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dh}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dH}; \quad \dfrac{dH'}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}}{dh'}, \quad \dfrac{dh'}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}}{dH'}. \end{cases}$$

C'est à ces équations que nous voulons étendre la méthode suivie par M. Delaunay dans le cas de la Lune.

Nous montrerons qu'on peut intégrer rigoureusement les douze équations (5), en réduisant la fonction perturbatrice $\mathcal{R}$ à sa partie constante et à un seul terme périodique, et nous apprendrons ensuite à former les équations d'où devront dépendre les arbitraires de l'intégration précédente; elles seront aussi simples que les équations (5).

§ II. — *Intégration des équations* (5) *dans le cas indiqué.*

On voit facilement qu'un terme quelconque du développement de $\mathcal{R}$ sera de la forme

$$A\cos(\alpha l + \beta g + \gamma h + \alpha' l' + \beta' g' + \gamma' h'),$$

α, β, γ, α', β', γ' étant des nombres entiers, et A une fonction de L, G, H, L', G', H'.

Considérons à part un de ces termes périodiques et la partie constante et posons

$$\mathcal{R} = -B - A\cos(\alpha l + \beta g + \gamma h + \alpha' l' + \beta' g' + \gamma' h') + \mathcal{R}_1,$$

ou en faisant, pour abréger, $\theta = \alpha l + \beta g + \gamma h + \alpha' l' + \beta' g' + \gamma' h'$,

$$(6)\qquad \mathcal{R} = -B - A\cos\theta + \mathcal{R}_1;$$

$\mathcal{R}_1$ désigne l'ensemble des autres termes périodiques de la fonction $\mathcal{R}$. Nous négligerons d'abord $\mathcal{R}_1$, et, prenant simplement

$$(7)\qquad \mathcal{R} = -B - A\cos\theta,$$

nous intégrerons rigoureusement les équations (5).

Suivons encore la méthode de Jacobi; il s'agira de trouver une intégrale complète de l'équation

$$(8)\quad \frac{dS}{dt} - B - A\cos\left(\alpha\frac{dS}{dL} + \beta\frac{dS}{dG} + \gamma\frac{dS}{dH} + \alpha'\frac{dS}{dL'} + \beta'\frac{dS}{dG'} + \gamma'\frac{dS}{dH'}\right) = 0,$$

c'est-à-dire une solution renfermant six constantes arbitraires.

Comme l'équation (8) ne contient pas le temps explicitement, nous ferons

$$S = Ct + S_1,$$

S_1 étant indépendant du temps.

Il suffira alors de trouver une solution de l'équation

$$(8\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} \theta &= \arccos\frac{C-B}{A} \\ &= \alpha\frac{dS_1}{dL} + \beta\frac{dS_1}{dG} + \gamma\frac{dS_1}{dH} + \alpha'\frac{dS_1}{dL'} + \beta'\frac{dS_1}{dG'} + \gamma'\frac{dS_1}{dH'}, \end{aligned}\right.$$

avec cinq constantes arbitraires.

Posons

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & & L' &= \frac{\alpha'}{\alpha}L + (L'), \\ G &= \frac{\beta}{\alpha}L + (G), & G' &= \frac{\beta'}{\alpha}L + (G'), \\ H &= \frac{\gamma}{\alpha}L + (H), & H' &= \frac{\gamma'}{\alpha}L + (H'), \end{aligned}\right.$$

(G), (H), (L'), (G'), (H') désignant de nouvelles variables : S_1 deviendra une fonction de ces nouvelles variables et de L, et si l'on désigne par $\left(\frac{dS_1}{dL}\right)$ la dérivée partielle de S_1 prise dans cette hypothèse, on aura, au lieu de l'équation (8 *bis*), l'équation

$$\theta = \arccos\frac{C-B}{A} = \alpha\left(\frac{dS_1}{dL}\right);$$

d'où l'on tire

$$S_1 = \int \arccos\frac{C-B}{A}\,\frac{dL}{\alpha}.$$

On peut ajouter une fonction arbitraire des variables (G),..., (H'); nous prendrons

$$S_1 = \int \arc\cos\frac{C-B}{A}\frac{dL}{\alpha} + (g)(G) + (h)(H) + (l')(L') + (g')(G') + (h')(H'),$$

en désignant par (g), (h), (l'), (g'), (h') des constantes arbitraires.

L'intégrale $\int \arc\cos\frac{C-B}{A}\frac{dL}{\alpha}$ est une fonction de L, de (G),..., (H') et de C : mettons cela en évidence en posant

$$(10) \qquad \int \arc\cos\frac{C-B}{A}\frac{dL}{\alpha} = K[L, (G), (H), (L'), (G'), (H'), C],$$

et, si nous revenons aux anciennes variables, nous aurons

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} S = Ct + K&\left(L, G - \frac{\beta}{\alpha}L, H - \frac{\gamma}{\alpha}L, L' - \frac{\alpha'}{\alpha}L, G' - \frac{\beta'}{\alpha}L, H' - \frac{\gamma'}{\alpha}L, C\right) \\ &+ (g)\left(G - \frac{\beta}{\alpha}L\right) + (h)\left(H - \frac{\gamma}{\alpha}L\right) \\ &+ (l')\left(L' - \frac{\alpha'}{\alpha}L\right) + (g')\left(G' - \frac{\beta'}{\alpha}L\right) + (h')\left(H' - \frac{\gamma'}{\alpha}L\right). \end{aligned} \right.$$

Telle est la solution complète que nous cherchions pour l'équation (8). Elle est fonction des six variables L, G, H, L', G', H', du temps t et des six constantes arbitraires C, (g), (h), (l'), (g'), (h').

Les intégrales des équations (5) seront dès lors

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{dS}{dC} = -c, & \dfrac{dS}{d(g)} = \text{const.}, & \dfrac{dS}{d(h)} = \text{const.}, \\ \dfrac{dS}{d(l')} = \text{const.}, & \dfrac{dS}{d(g')} = \text{const.}, & \dfrac{dS}{d(h')} = \text{const.}, \\ \dfrac{dS}{dL} = l, & \dfrac{dS}{dG} = g, & \dfrac{dS}{dH} = h, \\ \dfrac{dS}{dL'} = l', & \dfrac{dS}{dG'} = g', & \dfrac{dS}{dH'} = h', \end{array} \right.$$

c désignant une nouvelle constante arbitraire.

Les équations $\frac{dS}{d(g)} = \text{const.}, \ldots$ nous apprennent que les quantités

(G), (H), (L'), (G'), (H') sont des constantes; nous continuerons à les désigner par les mêmes lettres.

Cinq des intégrales (12) coïncideront avec les équations (9); quant aux autres, elles deviennent

$$(9\,bis)\quad \begin{cases} -(t+c) = \dfrac{dK}{dC}, \quad g = (g) + \dfrac{dK}{d(G)}, \quad h = (h) + \dfrac{dK}{d(H)}, \\ l' = (l') + \dfrac{dK}{d(L')}, \quad g' = (g') + \dfrac{dK}{d(G')}, \quad h' = (h') + \dfrac{dK}{d(H')}, \\ \alpha l + \beta g + \gamma h + \alpha' l' + \beta' g' + \gamma' h' = \arccos \dfrac{C-B}{A}. \end{cases}$$

Ces équations (9) et (9 *bis*) donnent nos douze variables L, G, H, L', G', H' l, g, h, l', g', h' en fonction du temps t, et des douze arbitraires C, (G), (H), (L'), (G'), (H'), c, (g), (h), (l'), (g'), (h').

§ III. — *Variation des arbitraires introduites par l'intégration précédente.*

Revenant aux équations (5), nous rétablissons $\mathcal{R}_1$, en faisant

$$\mathcal{R} = -B - A\cos\theta + \mathcal{R}_1.$$

Comme nous avons intégré par la méthode de Jacobi, nos arbitraires dépendront encore d'équations canoniques, savoir :

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}_1}{dc}, & \dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}_1}{dc}; \\ \dfrac{d(G)}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(g)}, & \dfrac{d(g)}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(G)}; \\ \dfrac{d(H)}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(h)}, & \dfrac{d(h)}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(H)}; \\ \dfrac{d(L')}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(l')}, & \dfrac{d(l')}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(L')}; \\ \dfrac{d(G')}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(g')}, & \dfrac{d(g')}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(G')}; \\ \dfrac{d(H')}{dt} = \dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(h')}, & \dfrac{d(h')}{dt} = -\dfrac{d\mathcal{R}_1}{d(H')}. \end{cases}$$

Revenons aux intégrales (9) et (9 *bis*), pour en examiner la forme.

On verra, comme dans la première Partie, que L est une fonction périodique paire de $\theta_0(t+c)$, θ_0 étant défini par la relation

$$\frac{\pi}{\theta_0} = \int_{\mathcal{L}'}^{\mathcal{L}''} \frac{1}{\sqrt{A^2 - (C-B)^2}} \frac{dL}{\alpha},$$

où $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ sont les deux limites de L; on en conclura donc les développements suivants

$$L = L_0 + L_1 \cos\theta_0(t+c) + L_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \ldots,$$

avec cinq formules analogues pour G, H, L′, G′, H′; de même,

$$l = (l) + l_0(t+c) + l_1 \sin\theta_0(t+c) + \ldots,$$

avec des formules analogues pour g, h, l', g', h'; et enfin

$$\theta = \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \ldots.$$

On aura du reste entre les coefficients $G_0, G_1, \ldots, H_0, H_1, \ldots$, les relations suivantes, conséquences des formules (9),

$$G_0 = \frac{\beta}{\alpha} L_0 + (G), \quad G_1 = \frac{\beta}{\alpha} L_1 \ldots,$$

et de même pour les $H_0, \ldots, H'_0$; on aura aussi les deux relations suivantes

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(l) + \beta(g) + \gamma(h) + \alpha'(l') + \beta'(g') + \gamma'(h') = 0, \\ \alpha l_0 + \beta g_0 + \gamma h_0 + \alpha' l'_0 + \beta' g'_0 + \gamma' h'_0 = \theta_0. \end{array} \right.$$

Si l'on substitue ces valeurs de L,..., H′, $l, \ldots, h, l', \ldots, h'$ dans la fonction $\mathcal{R}_1$, on voit qu'un terme quelconque de cette fonction sera de la forme

$$A \cos\{\alpha[(l) + l_0(t+c)] + \ldots + \gamma'[(h') + h'_0(t+c)]\},$$

A étant une fonction des quantités C, (G), (H), (L′), (G′), (H′).

On voit que, si l'on veut appliquer les formules (13), en formant les

dérivées partielles

$$\frac{d\mathcal{R}_1}{dC},\quad \frac{d\mathcal{R}_1}{d(G)},\ldots,\quad \frac{d\mathcal{R}_1}{d(H')},$$

le temps sortira des signes sin et cos, car les quantités $l_0, \ldots, h'_0$ sont des fonctions de C,..., (H'); c'est là un inconvénient. On l'évitera comme dans la première Partie.

§ IV. — *Changement d'arbitraires.*

Avant d'effectuer ce changement, revenons aux équations (13) : si l'on y pose

$$t + c = \tau \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_1 - C = \mathcal{R}_2,$$

on verra, comme dans la première Partie, que le système d'éléments

$$\begin{array}{cccccc} C, & (G), & , & (L'), & (G'), & (H'), \\ \tau, & (g), & (h), & (l'), & (g'), & (h'), \end{array}$$

est canonique relativement à la fonction $\mathcal{R}_2$.

Cela posé, pour nous mettre sur la voie des nouvelles variables, suivons encore la même marche que dans la première Partie; l'équation

$$C = + B + A\cos\theta \quad \text{ou} \quad C = -\mathcal{R}$$

nous donnera de même que dans la première Partie

$$\delta C = \frac{d\theta\,\delta L - dL\,\delta\theta}{\alpha\,dt} + \frac{dg}{dt}\,\delta(G) + \ldots + \frac{dH'}{dt}\,\delta(H'),$$

et on en conclura de même

$$\delta C = \theta_0\,\delta\frac{1}{\alpha}\left(L_0 + \frac{L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots}{2}\right) + g_0\,\delta(G) + \ldots + (h'_0)\,\delta(H').$$

Si donc on pose

$$A = \frac{1}{\alpha}\left(L_0 + \frac{L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots}{2}\right),$$

et que l'on considère C comme une fonction de A, (G),..., (H'), on

aura ces formules

$$\theta_0 = \frac{dC}{d\Lambda}, \quad g_0 = \frac{dC}{d(G)}, \dots, \quad h'_0 = \frac{dC}{d(H')}.$$

Veut-on rétablir l_0 au lieu de θ_0, pour la symétrie? La deuxième des formules (14) donnera

$$l_0 = \frac{1}{\alpha}\frac{dC}{d\Lambda} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{dC}{d(G)} - \dots, \quad -\frac{\gamma'}{\alpha}\frac{dC}{d(H')}.$$

Si donc on pose

$$(15)\left\{\begin{array}{lll} \Lambda = \frac{\Lambda_1}{\alpha} & \text{ou} & \Lambda_1 = L_0 + \frac{L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \dots}{2}, \\ (G) = (G_1) - \frac{\beta}{\alpha}\Lambda_1 & \text{ou} & (G_1) = G_0 + \frac{G_1\theta_1 + 2G_2\theta_2 + \dots}{2}, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots \\ (H') = (H'_1) - \frac{\gamma'}{\alpha}\Lambda_1 & \text{ou} & (H'_1) = H'_0 + \frac{H'_1\theta_1 + 2H'_2\theta_2 + \dots}{2}; \end{array}\right.$$

C deviendra une fonction de Λ_1, $(G_1), \dots, (H'_1)$, et on aura ces relations très-simples

$$(16) \qquad l_0 = \frac{dC}{d\Lambda_1}, \quad g_0 = \frac{dC}{d(G_1)}, \dots, \quad h'_0 = \frac{dC}{d(H'_1)}.$$

Dès lors, pour appliquer le théorème de Jacobi relatif au passage d'un système d'éléments canoniques à un autre pareil système, il suffira de prendre pour la fonction ψ

$$(17) \quad \psi = C\tau + (l)\Lambda_1 + (g)(G_1) + (h)(H_1) + \dots + (h'_1)(H'_1),$$

C étant supposé remplacé dans cette formule par sa valeur en fonction de Λ_1, $(G_1), \dots, (H'_1)$; par (l) on doit entendre la valeur

$$-\frac{\beta}{\alpha}(g) - \frac{\gamma}{\alpha}(h) - \dots - \frac{\gamma'}{\alpha}(h')$$

tirée de la première formule (14).

Les éléments du premier système canonique qui entrent dans ψ sont donc

$$\tau, \quad (g), \quad (h), \dots, \quad (h'_1);$$

le premier groupe d'éléments du nouveau système canonique sera

$$\Lambda, \quad (G_1), \quad (H_1), \ldots, \quad (H'_1).$$

On vérifie immédiatement les relations

$$\frac{d\psi}{d\tau} = C, \quad \frac{d\psi}{d(g)} = (G), \ldots, \quad \frac{d\psi}{d(h')} = (H');$$

le second groupe $\lambda, \varkappa, \eta, \lambda', \varkappa', \eta'$ du second système d'éléments sera donné par les formules suivantes

$$\lambda = \frac{d\psi}{d\Lambda_1}, \quad \varkappa = \frac{d\psi}{d(G_1)}, \ldots;$$

en faisant usage des relations (16), il vient

$$(18) \quad \begin{cases} \lambda = (l) + l_0\tau & \text{ou} \quad \lambda = (l) + l_0(t + c), \\ \varkappa = (g) + g_0\tau & \text{ou} \quad \varkappa = (g) + g_0(t + c), \\ \ldots\ldots\ldots & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta' = (h') + h'_0\tau & \text{ou} \quad \eta' = (h') + h'_0(t + c). \end{cases}$$

Par où l'on voit que les nouveaux éléments $\lambda, \ldots, \eta'$ sont les parties non périodiques des valeurs de $l, g, \ldots, h'$.

Lors donc que l'on aura développé en séries les intégrales données par les formules (9 *bis*), on y lira immédiatement les valeurs de $\lambda, \ldots, \eta'$.

Les équations (15) et (18) lient donc les deux systèmes

$$C, \quad (G), \ldots, \quad (H'), \quad c, \quad (g), \ldots, \quad (h') \quad \text{d'une part,}$$
$$\Lambda, \quad (G_1), \ldots, \quad (H'_1), \quad \lambda, \quad \varkappa, \ldots, \quad \eta' \quad \text{d'autre part.}$$

On aura alors les équations suivantes, lesquelles ont la forme canonique

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{d\Lambda_1}{dt} = \dfrac{d\mathfrak{R}_2}{d\lambda}, & \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{d\mathfrak{R}_2}{d\Lambda_1}, \\ \dfrac{d(G_1)}{dt} = \dfrac{d\mathfrak{R}_2}{d\varkappa}, & \dfrac{d\varkappa}{dt} = -\dfrac{d\mathfrak{R}_2}{d(G_1)}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d(H'_1)}{dt} = \dfrac{d\mathfrak{R}_2}{d\eta'}, & \dfrac{d\eta'}{dt} = -\dfrac{d\mathfrak{R}_2}{d(H'_1)}; \end{cases}$$

et comme un terme quelconque de la fonction $\mathcal{R}_2$ sera de la forme

$$A \cos(\alpha\lambda + \beta\varkappa + \gamma\eta + \alpha'\lambda' + \beta'\varkappa' + \gamma'\eta'),$$

où A est une simple fonction de Λ_1, (G_1), ..., (H'_1), et $\alpha, \ldots, \gamma'$ sont des nombres entiers, on voit que le temps ne sortira plus des signes sin et cos.

La fonction $\mathcal{R}_2$, qui entre dans les équations précédentes, est

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 - C.$$

Comme C est une fonction de Λ_1, (G_1), ..., (H'_1), le terme périodique considéré $-A\cos\theta$ a complètement disparu.

De ce qui précède, on conclut la règle pratique suivante :

Dans les coordonnées des deux planètes, on remplacera

$$\begin{array}{ll} L & \text{par } L_0 + L_1 \cos(\alpha\lambda + \beta\varkappa + \ldots + \gamma'\eta') + \ldots, \\ \ldots & \ldots \\ H' & \text{par } L'_0 + L'_1 \cos(\alpha\lambda + \beta\varkappa + \ldots + \gamma'\eta') + \ldots; \end{array}$$

les coefficients de ces formules sont des fonctions connues de C, (G), ...; ils sont liés à L, G, .. par les équations

$$\begin{array}{l} L = L_0 + \frac{1}{2}(L_1\theta_1 + 2L_2\theta_2 + \ldots), \\ \ldots \\ H' = H'_0 + \frac{1}{2}(H'_1\theta_1 + 2H'_2\theta_2 + \ldots); \end{array}$$

lors donc qu'on aura développé en séries les intégrales données par les formules (9 *bis*), on pourra exprimer tous les coefficients L, L_1, ... au moyen des formules L, G....

Ces nouvelles variables dépendront des mêmes équations

$$\begin{array}{ll} \frac{dL}{dt} = \frac{d\mathcal{R}_2}{dl}, & \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathcal{R}_2}{dL}, \\ \ldots, & \ldots, \\ \frac{dL'}{dt} = \frac{d\mathcal{R}_2}{dl'}, & \frac{dl'}{dt} = -\frac{d\mathcal{R}_2}{dL'}, \\ \ldots, & \ldots, \end{array}$$

où $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 - C$. La nouvelle fonction $\mathcal{R}_2$ ne contient plus le terme périodique considéré; on pourra répéter la même opération et faire disparaître autant de termes que l'on voudra.

§ V. — *Des cas où la méthode précédente serait employée avantageusement.*

Cette méthode, assez longue dans la pratique, ne serait d'aucune utilité dans la théorie des perturbations de Mercure, de Vénus, de la Terre et de Mars; les inégalités de ces planètes sont très-petites; il y a rarement lieu de faire plus d'une approximation, et la méthode ordinaire suffit amplement.

Mais pour les planètes plus éloignées du Soleil, et principalement pour Jupiter et Saturne, les inégalités sont très-fortes; pour Saturne, par exemple, les inégalités de la longitude provenant de l'action de Jupiter peuvent dépasser 1 degré.

La grandeur de ces inégalités tient d'une part à la grandeur des masses de Jupiter et de Saturne, et d'autre part à une cause particulière découverte par Laplace. Il arrive que cinq fois le moyen mouvement n' de Saturne est à très-peu près égal à deux fois le moyen mouvement de Jupiter, de telle sorte que la différence $5n' - 2n$ est une très-petite fraction de n ou de n'. Si donc on considère dans la fonction perturbatrice un terme dont l'argument soit $5l' - 2l + q$, q étant une fonction des longitudes des nœuds et des périhélies,

$$A \cos(5l' - 2l + q),$$

bien que le coefficient A de ce terme soit au moins du troisième ordre relativement aux excentricités et aux inclinaisons, ce terme pourra néanmoins produire des inégalités très-sensibles dans les éléments; car il introduira dans l'un quelconque des éléments l'inégalité

$$\frac{B \cos(5l' - 2l + q)}{5n' - 2n},$$

et cette expression pourra avoir une valeur sensible à cause du petit diviseur $5n' - 2n$.

Mais c'est surtout dans les expressions des longitudes moyennes de

Jupiter et de Saturne que les inégalités précédentes se feront sentir; car pour obtenir les perturbations des longitudes moyennes, on doit intégrer deux fois le terme $A\cos(5l' - 2l + q)dt$, ce qui introduit en diviseur la très-petite quantité $(5n' - 2n)^2$.

La réunion des inégalités précédentes constitue la *grande inégalité* de Jupiter et de Saturne; pour Saturne elle atteint environ 45 minutes quant à la longitude.

On comprend qu'une inégalité aussi considérable doive être très-difficile à déterminer; il faut tenir compte de la seconde approximation avec le plus grand soin; elle introduit dans la longitude de Saturne une inégalité qui peut s'élever à plus d'une demi-minute d'angle. On peut voir dans la *Mécanique céleste* combien cette partie de la théorie de Jupiter et de Saturne présente de difficultés.

C'est donc, à proprement parler, à la détermination précise de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne qu'il conviendrait d'appliquer la méthode exposée dans la seconde Partie de cette Thèse. Il est vrai que, dans cette méthode, on néglige, dans les fonctions perturbatrices R et R', les parties

$$m'\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \quad \text{et} \quad m\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}.$$

Mais ces parties n'interviennent que pour une faible part dans la grande inégalité; car si elles fournissent des termes tels que

$$A\cos(5l' - 2l + q),$$

le coefficient A sera au moins du cinquième ordre relativement aux excentricités et aux inclinaisons, tandis que les termes analogues fournis par les premières parties de R et R', savoir $\frac{m'}{\Delta}$ et $\frac{m}{\Delta}$ ne sont que du troisième ordre. On déterminera donc par la méthode ordinaire l'influence des portions $m'\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}$ et $m\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}$ dans la grande inégalité.

C'est ensuite qu'on pourra appliquer la méthode actuelle pour faire disparaître, de la partie commune, $\frac{1}{\Delta}$, des deux fonctions perturbatrices,

tous les termes dont les arguments sont de la forme

$$\alpha(5l' - 2l) + \beta\varpi + \gamma\theta + \beta'\varpi' + \gamma\theta',$$

α, β, γ, β', γ' désignant des nombres entiers, c'est-à-dire tous les termes qui interviennent dans la grande inégalité.

Cela permettra de faire deux, trois,... autant d'approximations que l'on voudra.

Quand on aura fait ainsi disparaître les termes cités, on pourra calculer l'effet des autres par la méthode ordinaire.

SUR

LES VIBRATIONS INTÉRIEURES DES MOLÉCULES;

PAR M. CHARLES BRIOT.

I.

1. Lorsqu'un métal, introduit dans une flamme, est volatilisé et porté à une très-haute température, il devient lumineux, et produit un spectre composé d'un certain nombre de raies brillantes séparées par des intervalles obscurs; les rayons lumineux émis par un même métal correspondent à des nombres de vibrations déterminés. Ces rayons étant indépendants de la densité de la vapeur, et par conséquent des actions des molécules les unes sur les autres, il semble qu'on doive les attribuer, non aux mouvements des molécules elles-mêmes, mais aux vibrations des atomes qui les composent, vibrations qui dépendent de la constitution de la molécule. On regardera ainsi chaque molécule comme un petit instrument capable de rendre un certain nombre de sons déterminés.

2. Nous pouvons nous borner à considérer une molécule isolée, formée de n atomes. D'après les lois générales de la Mécanique, on sait que les actions mutuelles des atomes qui la composent n'ont pas d'influence sur le mouvement de son centre de gravité, ni sur la somme des aires décrites par les projections sur un plan fixe des rayons menés du centre de gravité aux divers atomes. Nous supposerons que la molécule soit primitivement au repos, dans un état d'équilibre stable, et nous étudierons les vibrations infiniment petites telles que chaque atome oscille autour de sa position d'équilibre.

Soit $m_i m_{i'} F(r_{i,i'})$ l'action mutuelle de deux atomes m_i et $m_{i'}$. Po-

sons $\frac{F(r)}{r} = f(r)$; les trois équations d'équilibre pour l'atome m_i sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum m_{i'} f(r_{i,i'})(x_{i'} - x_i) = 0, \\ \sum m_{i'} f(r_{i,i'})(y_{i'} - y_i) = 0, \\ \sum m_{i'} f(r_{i,i'})(z_{i'} - z_i) = 0, \end{cases}$$

i' prenant les valeurs 1, 2, 3,..., n, excepté i.

Supposons maintenant les atomes dérangés très-peu de leurs positions d'équilibre. Si l'on appelle $x_i + \xi_i$, $y_i + \eta_i$, $z_i + \zeta_i$ les coordonnées de l'atome m_i; $r_{i,i'} + \rho_{i,i'}$ la distance des deux atomes m_i et $m_{i'}$ pendant le mouvement, et si l'on néglige les quantités petites du second ordre, on aura

$$r_{i,i'}\rho_{i,i'} = (x_{i'} - x_i)(\xi_{i'} - \xi_i) + (y_{i'} - y_i)(\eta_{i'} - \eta_i) + (z_{i'} - z_i)(\zeta_{i'} - \zeta_i),$$

et les mouvements vibratoires des n atomes qui composent la molécule seront représentés par un système de $3n$ équations de la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \sum m_{i'} [f(r_{i,i'})(\xi_{i'} - \xi_i) + f'(r_{i,i'})(x_{i'} - x_i)\rho_{i,i'}], \\ \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \sum m_{i'} [f(r_{i,i'})(\eta_{i'} - \eta_i) + f'(r_{i,i'})(y_{i'} - y_i)\rho_{i,i'}], \\ \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \sum m_{i'} [f(r_{i,i'})(\zeta_{i'} - \zeta_i) + f'(r_{i,i'})(z_{i'} - z_i)\rho_{i,i'}]. \end{cases}$$

5. En prenant pour origine le centre de gravité, on a

$$(3)\qquad \sum m_i \xi_i = 0, \quad \sum m_i \eta_i = 0, \quad \sum m_i \zeta_i = 0.$$

D'autre part, la loi des aires donne les relations

$$\sum m_i \left(y_i \frac{d\zeta_i}{dt} - z_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) = A, \ldots;$$

d'où

$$\sum m_i (y_i \zeta_i - z_i \eta_i) = A t + A', \ldots.$$

Dans le cas que nous étudions, les inconnues ξ_i, η_i, ζ_i étant composées de termes périodiques de la forme $a_i \cos(st + \alpha_i)$, les six con-

stantes A, A',... sont nulles. On a ainsi les trois relations

$$(4)\quad \begin{cases} \sum m_i(y_i\zeta_i - z_i\eta_i) = 0, \\ \sum m_i(z_i\xi_i - x_i\zeta_i) = 0, \\ \sum m_i(x_i\eta_i - y_i\xi_i) = 0. \end{cases}$$

Les six équations (3) et (4) remplaceront six des $3n$ équations (2).

Pour intégrer les équations linéaires et homogènes (2), on posera en général

$$\xi_i = a_i\cos(st+\alpha),\quad \eta_i = b_i\cos(st+\alpha),\quad \zeta_i = c_i\cos(st+\alpha);$$

en égalant le déterminant à zéro, on aura une équation $S = 0$ du degré $3n - 6$ en s^2. Chaque valeur réelle et positive de s^2 donnera une vibration dont la période est $T = \frac{2\pi}{s}\cdot$ La valeur de α reste arbitraire, ainsi que celle de l'un des $3n$ coefficients a_i, b_i, c_i. On en conclut *qu'une molécule formée de n atomes rend en général* $3(n-2)$ *vibrations distinctes et rectilignes.*

II.

4. Appliquons cette méthode à quelques cas simples. Considérons d'abord une molécule formée de trois atomes disposés en triangle. Dans l'état d'équilibre, chaque atome étant en équilibre sous l'influence de deux forces faisant entre elles un certain angle, il est nécessaire que chacune de ces forces soit nulle. On a donc

$$F(r_{1,2}) = F(r_{2,3}) = F(r_{1,3}) = 0,$$

ce qui exige que $r_{1,2} = r_{2,3} = r_{1,3}$. Ainsi, dans l'état d'équilibre, le triangle est équilatéral. Si l'on prend le plan de ce triangle pour plan des xy, on a

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_3}{dt^2} = 0,$$

et, par suite,

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.$$

La vibration s'effectue dans ce plan. Les équations (2) deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} = m_2(x_2 - x_1)f'(r)\rho_{1,2} + m_3(x_3 - x_1)f'(r)\rho_{1,3}, \\ \dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} = m_2(y_2 - y_1)f'(r)\rho_{1,2} + m_3(y_3 - y_1)f'(r)\rho_{1,3}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$r\rho_{1,2} = (x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) + (y_2 - y_1)(\eta_2 - \eta_1).$$

On en déduit, en remarquant que le triangle est équilatéral, et posant $F'(r) = 2p$,

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\rho_{2,3}}{dt^2} + 2p(m_2 + m_3)\rho_{2,3} + pm_1(\rho_{1,2} + \rho_{1,3}) = 0, \\ \dfrac{d^2\rho_{1,3}}{dt^2} + 2p(m_1 + m_3)\rho_{1,3} + pm_2(\rho_{2,1} + \rho_{2,3}) = 0, \\ \dfrac{d^2\rho_{1,2}}{dt^2} + 2p(m_1 + m_2)\rho_{1,2} + pm_3(\rho_{3,1} + \rho_{3,2}) = 0. \end{cases}$$

Un système d'intégrales simples est de la forme

$$\rho_{2,3} = A_1\cos(st + \alpha),\quad \rho_{1,3} = A_2\cos(st + \alpha),\quad \rho_{1,2} = A_3\cos(st + \alpha);$$

les constantes doivent satisfaire aux relations

$$(7)\quad \begin{cases} [s^2 - p(2m_2 + 2m_3 - m_1)]A_1 - pm_1(A_1 + A_2 + A_3) = 0, \\ [s^2 - p(2m_3 + 2m_1 - m_2)]A_2 - pm_2(A_1 + A_2 + A_3) = 0, \\ [s^2 - p(2m_1 + 2m_2 - m_3)]A_3 - pm_3(A_1 + A_2 + A_3) = 0. \end{cases}$$

Posant $s^2 = 2p(m_1 + m_2 + m_3) - 3pu$, on en déduit l'équation du troisième degré

$$(8)\quad \frac{m_1}{m_1 - u} + \frac{m_2}{m_2 - u} + \frac{m_3}{m_3 - u} - 3 = 0,$$

qui a ses trois racines réelles. Connaissant $\rho_{2,3}$, $\rho_{1,3}$, $\rho_{1,2}$ on déterminera ξ_1, η_1,... à l'aide des équations (5); on obtient ainsi trois vibrations rectilignes.

5. Dans le cas particulier où la molécule est formée de trois atomes

de même masse m, les équations (7) deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} (s^2 - 3pm)A_1 - pm(A_1 + A_2 + A_3) = 0, \\ (s^2 - 3pm)A_2 - pm(A_1 + A_2 + A_3) = 0, \\ (s^2 - 3pm)A_3 - pm(A_1 + A_2 + A_3) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit la relation

$$(10)\qquad (s^2 - 6pm)(A_1 + A_2 + A_3) = 0.$$

Ces équations admettent les deux solutions

$$s^2 = 6pm, \quad A_1 = A_2 = A_3 = A,$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0, \quad s^2 = 3pm.$$

La première valeur de s^2 est racine simple de l'équation du troisième degré, la seconde racine double.

6. Première solution. — Si l'on prend pour origine des coordonnées le centre de gravité de la molécule, les équations (5) deviennent

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -6pm\frac{x_1}{r}A\cos(st+\alpha), \quad \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -6pm\frac{y_1}{r}A\cos(st+\alpha),$$

d'où

$$\xi_1 = A\frac{x_1}{r}\cos(st+\alpha), \quad \eta_1 = A\frac{y_1}{r}\cos(st+\alpha).$$

On en conclut que les vibrations des trois atomes s'effectuent suivant des droites passant par le centre de gravité. Le triangle se dilate et se contracte alternativement en restant homothétique à lui-même.

7. Deuxième solution. — Deux des coefficients A_1, A_2, A_3 sont arbitraires. Les équations (5) deviennent

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = 2pm\frac{1}{r}(A_1x_1 + A_3x_2 + A_2x_3)\cos(st+\alpha),$$

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = 2pm\frac{1}{r}(A_1y_1 + A_3y_2 + A_2y_3)\cos(st+\alpha);$$

d'où

$$\xi_1 = -\frac{2}{3}\frac{1}{r}(A_1 x_1 + A_3 x_2 + A_2 x_3)\cos(st + \alpha),$$

$$\eta_1 = -\frac{2}{3}\frac{1}{r}(A_1 y_1 + A_3 y_2 + A_2 y_3)\cos(st + \alpha).$$

Chaque atome vibre en ligne droite; l'amplitude et la direction de l'une des vibrations dans le plan sont arbitraires; les amplitudes sont égales pour les trois atomes. On reconnaît aisément les trois droites suivant lesquelles vibrent les trois atomes passent par un même point, situé sur le cercle circonscrit au triangle d'équilibre, et que, pendant le mouvement, le périmètre du triangle et sa surface restent constants.

En combinant deux vibrations rectilignes de cette seconde espèce, ayant des phases différentes α, on obtient des vibrations elliptiques Les trois atomes décrivent des ellipses égales.

Ainsi, quand la molécule est formée de trois atomes égaux, on n'a plus que deux périodes différentes : la première vibration est analogue aux vibrations longitudinales; la seconde, aux vibrations transversales de l'éther.

III.

8. Considérons maintenant une molécule formée de quatre atomes placés au sommet d'un tétraèdre. Dans l'état d'équilibre, chaque atome devant être en équilibre sous l'influence de trois forces ayant des directions différentes, on en conclut, comme précédemment, que ces forces sont nulles séparément, et par conséquent que le tétraedre est régulier. Si l'on appelle r l'arête de ce tétraèdre, les équations (2) deviennent

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} = m_2(x_2 - x_1)f'(r)\rho_{1,2} + m_3(x_3 - x_1)f'(r)\rho_{1,3} \\ \qquad + m_4(x_4 - x_1)f'(r)\rho_{1,4}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

en posant $F'(r) = 2p$, on a six équations de la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\rho_{1,2}}{dt^2} = -2(m_1 + m_2)p\rho_{1,2} - m_3 p(\rho_{1,3} + \rho_{2,3}) - m_4 p(\rho_{1,4} + \rho_{2,4}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui conduisent à une équation du sixième degré en s^2, donnant six vibrations rectilignes.

9. Lorsque les quatre atomes ont des masses égales, ces équations deviennent

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\rho_{1,2}}{dt^2} + 4mp\rho_{1,2} + mp(\rho_{1,3} + \rho_{1,4} + \rho_{2,3} + \rho_{2,4}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour intégrer, on posera

$$\rho_{1,2} = A_{1,2}\cos(st+\alpha), \quad \rho_{1,3} = A_{1,3}\cos(st+\alpha), \ldots,$$

les constantes étant assujetties à vérifier les relations

$$(14)\quad \begin{cases} (s^2 - 3mp)A_{1,2} + mpA_{3,4} - mpL = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où L désigne la somme des constantes A.

Ces relations, combinées deux à deux, donnent

$$(15)\quad \begin{cases} (s^2 - 4mp)(A_{1,2} - A_{3,4}) = 0, \\ (s^2 - 2mp)(A_{1,2} + A_{3,4}) - 2mpL = 0, \end{cases}$$

et, ajoutées toutes ensemble,

$$(16)\quad (s^2 - 8mp)L = 0.$$

10. Première solution : *Racine simple* $s^2 = 8mp$. — On déduit des équations (15)

$$A_{1,2} = A_{3,4}, \quad A_{1,3} = A_{2,4}, \quad A_{1,4} = A_{2,3},$$

et des équations (14)

$$A_{1,2} = A_{1,3} = A_{1,4} = A;$$

la constante A est arbitraire.

Les équations (11) se réduisent à la forme

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -4mx_1 f'(r)A\cos(st+\alpha),$$

d'où

$$\xi_1 = \frac{x_1}{r} \mathrm{A} \cos(st + \alpha), \quad \eta_1 = \frac{y_1}{r} \mathrm{A} \cos(st + \alpha), \quad \zeta_1 = \frac{z_1}{r} \mathrm{A} \cos(st + \alpha).$$

On en conclut que les *vibrations des atomes s'effectuent suivant des droites passant par le centre de gravité*. Le tétraèdre se dilate et se contracte alternativement, en restant homothétique à lui-même.

11. Deuxième solution : $\mathrm{L} = 0$; *racine double* $s^2 = 2mp$. — On a encore

$$\mathrm{A}_{1,2} = \mathrm{A}_{3,4}, \quad \mathrm{A}_{1,3} = \mathrm{A}_{2,4}, \quad \mathrm{A}_{1,4} = \mathrm{A}_{2,3}$$

et par suite

$$\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{A}_{1,3} + \mathrm{A}_{1,4} = 0.$$

Deux des constantes restent arbitraires. On en déduit

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} = \rho_{3,4} &= \mathrm{A} \cos(st + \alpha), \\ \rho_{1,3} = \rho_{2,4} &= \mathrm{B} \cos(st + \alpha), \\ \rho_{1,4} = \rho_{2,3} &= -(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \cos(st + \alpha). \end{aligned}$$

Les équations (11) se réduisent à

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{2mp}{r} [\mathrm{A}x_2 + \mathrm{B}x_3 - (\mathrm{A} + \mathrm{B})\, x_4] \cos(st + \alpha);$$

d'où

$$\xi_1 = \frac{1}{r} [(\mathrm{A} + \mathrm{B})\, x_4 - \mathrm{A}x_2 - \mathrm{B}x_3] \cos(st + \alpha).$$

Si le plan des xy est parallèle à la face $m_2 m_3 m_4$ du tétraèdre dans l'état d'équilibre, on a $\zeta_1 = 0$. Ainsi *la vibration de chacun des atomes s'effectue dans un plan parallèle à la face opposée du tétraèdre*. La direction de la vibration de l'un des atomes est arbitraire dans ce plan.

En combinant deux vibrations de cette seconde espèce, on a des vibrations elliptiques dans des plans déterminés.

12. Troisième solution : *Racine triple* $s^2 = 4mp$. — On a

$$\mathrm{L} = 0, \quad \mathrm{A}_{1,2} = -\mathrm{A}_{3,4}, \quad \mathrm{A}_{1,3} = -\mathrm{A}_{2,4}, \quad \mathrm{A}_{1,4} = -\mathrm{A}_{2,3};$$

d'ou

$$\rho_{1,2} = -\rho_{3,4} = \mathrm{A}\cos(st+\alpha),$$
$$\rho_{1,3} = -\rho_{2,4} = \mathrm{B}\cos(st+\alpha),$$
$$\rho_{1,4} = -\rho_{2,3} = \mathrm{C}\cos(st+\alpha);$$

les trois constantes A, B, C restent arbitraires.

Des équations (11) on déduit ensuite

$$\xi_1 = -\frac{1}{2r}\left[(x_2 - x_1)\mathrm{A} + (x_3 - x_1)\mathrm{B} + (x_4 - x_1)\mathrm{C}\right]\cos(st+\alpha).$$

La direction de la vibration rectiligne de l'un des atomes est arbitraire dans l'espace. En réunissant deux vibrations de cette troisième espèce, on obtient des vibrations elliptiques dont le plan de l'une est orienté d'une manière quelconque dans l'espace.

Ainsi une molécule tétraédrique formée de quatre atomes égaux ne peut rendre que trois sons différents.

THÉORIE NOUVELLE DES ONDES LUMINEUSES,

PAR M. BOUSSINESQ.

Présentée à l'Académie des Sciences le 5 août 1867;
voir les *Comptes rendus*, t. LXV, p. 235.

Je considère l'éther libre comme un milieu isotrope, pouvant propager des vibrations transversales d'une amplitude extrêmement petite, et la matière pondérable comme composée d'atomes nombreux, entre lesquels pénètrent ceux de l'éther. J'admets aussi qu'il se produit, pendant le mouvement vibratoire, des actions s'exerçant à de très-petites distances entre la matière pondérable et l'éther.

Les ondes lumineuses se propagent dans l'éther libre avec une rapidité immense : par conséquent, l'élasticité de ce milieu doit être presque infinie par rapport à sa densité, pour les vibrations de très-petite amplitude. D'ailleurs ces vibrations occasionnent dans la matière pondérable des changements considérables, tels que la fusion, la volatilisation, etc.; donc les actions qui s'exercent entre ces deux espèces de matière sont très-puissantes relativement à la petitesse des mouvements dont il s'agit. Mais ces actions sont-elles considérables en valeur absolue? Je ne le pense pas; car, dès que les excursions des molécules pondérables acquièrent une grandeur sensible, comme dans les ondes sonores ou dans les mouvements finis des corps, il est impossible de reconnaître expérimentalement la moindre résistance opposée à ces molécules par l'éther. On doit donc, ce me semble, considérer cet agent comme doué d'une élasticité puissante pour des vibrations de très-petite amplitude, mais admettre en même temps que ses forces élastiques cessent d'être proportionnelles aux écarts, avant que ceux-ci deviennent appréciables, et qu'elles restent toujours très-petites en valeur absolue. La petitesse de ces actions, et de celles de l'éther sur

la matière pondérable, n'empêchera pas leurs effets sur celle-ci, pourvu qu'elles soient comparables, lors de vibrations très-rapides d'une amplitude insensible, aux forces élastiques de la matière pondérable.

Cela posé, concevons un corps homogène, créé au milieu de l'éther libre en repos. S'il existe pendant le repos des actions entre ces deux espèces de matière, ce que nous ne savons pas, l'éther contenu dans l'intérieur du corps sera soumis à des actions sensiblement égales dans tous les sens, et dont la résultante sera nulle; mais celui qui se trouvera près de la surface sera comprimé ou dilaté par l'action des couches sous-jacentes de matière pondérable. D'après la pensée énoncée ci-dessus, cette action devra être extrêmement petite, et il me paraît naturel d'admettre qu'elle ne changera pas d'une manière appréciable l'état de l'éther. Si elle changeait en particulier son élasticité, on n'arriverait pas aux conditions de continuité de Cauchy, ni par suite aux lois observées de la réflexion et de la réfraction, ainsi que nous le verrons au § VIII. Nous admettrons donc que l'éther contenu dans les corps est sensiblement identique à l'éther libre. Un fait pareil se produit chez les gaz : mêlés à d'autres gaz sans action chimique sur eux, ils gardent à très-peu près la même élasticité et la même densité que s'ils étaient seuls.

Supposons actuellement qu'une onde lumineuse vienne à pénétrer dans un tel milieu. Celui-ci sera parfaitement transparent, si l'onde y continue sa marche sans s'éteindre ni se morceler à l'infini. Cela arrivera dans deux hypothèses différentes : d'abord, si le corps est tellement constitué, que les molécules pondérables restent immobiles pendant les vibrations de l'éther, et n'absorbent pas une quantité appréciable du mouvement; en deuxième lieu, si la matière pondérable y vibre en concordance avec l'éther. La première hypothèse nous paraît invraisemblable; car on ne conçoit guère comment les molécules pondérables pourraient, dans un milieu agité, rester immobiles et n'absorber qu'une fraction insensible du mouvement. Nous admettrons la seconde, qui nous expliquera très-simplement, avec toutes leurs lois observées, la dispersion, la polarisation rotatoire, la double réfraction rectiligne et elliptique, la réflexion et la réfraction.

Un corps imparfaitement transparent sera au contraire celui qui, ne pouvant vibrer complétement à l'unisson de son éther, brisera sans

cesse et morcellera à l'infini les ondes qui se propageront à son intérieur. Il donnera ainsi naissance à de nouveaux mouvements vibratoires, dont la longueur d'onde pourra n'être pas la même que celle des premiers.

Si le morcellement est tellement rapide, que toute onde de force moyenne soit anéantie avant d'avoir parcouru un espace sensible, le corps sera opaque ou athermane. La force vive ne se perdra pas pour cela, mais elle passera sans cesse dans de nouvelles ondes produites de proche en proche : la conductibilité sera justement cette propriété qu'aura le corps de propager lentement dans son intérieur, sous forme d'ondes toujours nouvelles d'une étendue infiniment petite, la force vive qu'il aura reçue. Celle-ci s'accumulera dans le corps, car il en arrivera sans cesse de nouvelles quantités avant que les premières aient pu sortir; l'agitation des molécules augmentera donc, et produira divers effets qui constituent l'échauffement. J'espère montrer dans un autre Mémoire que, de ce point de vue, on arrive aisément aux équations de la température et à l'explication des principaux phénomènes physiques et dynamiques de la chaleur; ici je me bornerai à l'étude des ondes lumineuses.

§ I. — *Équations des mouvements vibratoires.*

Quand nous disons que les vibrations très-petites de la matière pondérable, dans les corps transparents, sont concordantes avec celles de l'éther, nous entendons que, dans les mouvements périodiques de faible amplitude, la position des molécules pondérables dépend à chaque instant de celle des molécules d'éther qui les environnent, et ne dépend pas d'autre chose. Prenons un système de coordonnées rectangulaires des x, y, z. En un point (x, y, z) du milieu, et tout autour dans une très-petite étendue, la position des molécules d'éther est définie : à une première approximation, par les déplacements suivant les axes (u, v, w) de la molécule d'éther M dont les coordonnées d'équilibre sont x, y, z; à la deuxième approximation, par les dérivées premières $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$; à la troisième, par les dérivées secondes $\frac{d^2(u, v, w)}{d(x, y, z)\, d(x, y, z)}$, etc. En

effet, si $x+\mathrm{h}$, $y+\mathrm{k}$, $z+\mathrm{l}$ sont les coordonnées d'équilibre d'une seconde molécule d'éther M', voisine de M, son déplacement suivant l'axe des x sera

$$u+\frac{du}{dx}\mathrm{h}+\frac{du}{dy}\mathrm{k}+\frac{du}{dz}\mathrm{l}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\mathrm{h}^2+\frac{d^2u}{dy^2}\mathrm{k}^2+\frac{d^2u}{dz^2}\mathrm{l}^2+2\frac{d^2u}{dy\,dz}\mathrm{kl}+2\frac{d^2u}{dz\,dx}\mathrm{lh}+2\frac{d^2u}{dx\,dy}\mathrm{hk}\right)+\ldots.$$

On voit qu'il ne varie qu'avec u et ses dérivées partielles des divers ordres en x, y, z. Comme il en serait de même pour les déplacements suivant les autres axes, et pour toutes les autres molécules voisines de M, l'état de l'éther est parfaitement déterminé, dans un petit espace autour de chaque point, par les valeurs qu'ont en ce point u, v, w et leurs dérivées partielles en x, y, z. Les déplacements suivant les axes u_1, v_1, w_1 de la molécule pondérable dont la position d'équilibre est (x, y, z), ne dépendent que de cet état, et seront fonctions des mêmes variables. On aura ainsi

$$(1)\quad \begin{cases} u_1,\ v_1,\ w_1 = \text{des fonctions de } u,\ v,\ w, \text{ de } \dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de } \dfrac{d^2(u,v,w)}{d(x,y,z)\,d(x,y,z)},\ldots. \end{cases}$$

Pour u, v, w assez petits, les expressions de u_1, v_1, w_1 pourront être développées par la série de Maclaurin, et, lors des ondes lumineuses, on pourra ne garder que les termes du premier degré.

Les termes en $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ seraient négligeables par rapport à ceux en u, v, w, si la longueur d'onde n'était pas très-petite; mais, comme elle l'est, et que ces termes la contiendront en dénominateur, ils pourront avoir une valeur sensible. Il en est de même des termes en $\dfrac{d^2(u,v,w)}{d(x,y,z)\,d(x,y,z)}$. Nous nous arrêterons généralement à ces derniers : les résultats ainsi obtenus seront suffisamment approchés dans la plupart des cas.

Cela posé, cherchons les équations du mouvement de l'éther. Celui-ci étant supposé sensiblement identique à l'éther libre, et par con-

séquent isotrope comme lui, ses actions élastiques donneront suivant l'axe des x, sur un volume très-petit ϖ comprenant la molécule M, une composante de la forme

$$\varpi\left[(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u\right]:$$

θ désigne la dilatation $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$, Δ_2 désigne le symbole $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$, enfin λ et μ sont les deux coefficients d'élasticité de l'éther (*voir* LAMÉ, *Leçons sur l'élasticité*, § 26).

Les forces élastiques de la matière pondérable, developpées pendant les mouvements de très-petite amplitude qui constituent les ondes lumineuses, sont trop peu considérables pour produire un effet sensible [*].

Mais il n'en est pas ainsi des actions réciproques de la matière pondérable et de l'éther : ce sont elles en effet qui produisent les vibrations de l'une et modifient celles de l'autre. Bien que ces forces nous soient inconnues, il est naturel de penser que leur effet le plus grand et sensible provient d'une espèce de frottement entre les molécules d'éther et celles de la matière pondérable, qui passent très-pres les unes des autres sans avoir une vitesse commune. Par suite, l'accélération des molécules pondérables contenues dans le volume ϖ est due à l'éther de ce volume, et leur force motrice est égale et contraire à leur action sur cet éther. En désignant par ρ_1 la densité de la

---

[*] En effet, les forces élastiques exercées sur l'élément de volume ϖ d'éther sont du même ordre de grandeur que les produits de $\varpi\lambda$, $\varpi\mu$ par les déplacements u, v, w : si nous appelons ρ la densité de l'éther, ω_0^2 le carré de la vitesse de propagation des ondes transversales dans l'éther libre, carré égal à $\frac{\mu}{\rho}$, et m la quantité de mouvement que possède l'élément, elles seront de même ordre que le produit $\omega_0^2 m$. De même, les forces élastiques exercées sur un élément égal de volume de matière pondérable seront du même ordre que $\omega_1^2 m_1$, ω_1 étant la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans ce milieu, et m_1 la quantité de mouvement que possède l'élément considéré. Lors des ondes lumineuses, ce dernier produit $\omega_1^2 m_1$ est bien négligeable à côté de $\omega_0^2 m$; car m et m_1 sont comparables, tandis que ω_1 est comme nul par rapport à ω_0.

matière pondérable, cette action aura pour composante, suivant l'axe des x, $-\rho_1\varpi\frac{d^2u_1}{dt^2}$: $\frac{d^2u_1}{dt^2}$ y représente l'accélération suivant l'axe des x de la molécule pondérable qui se trouve actuellement avec la molécule M d'éther; mais, tous les déplacements étant extrêmement petits, cette accélération ne diffère pas d'une manière appréciable de celle de la molécule pondérable dont les coordonnées d'équilibre sont x, y, z, et nous pourrons y remplacer u_1 par son expression (1).

Si nous appelons ρ la densité de l'éther, la composante motrice $\rho\varpi\frac{d^2u}{dt^2}$ du volume ϖ d'éther sera égale à

$$\varpi\left[(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u\right]-\rho_1\varpi\frac{d^2u_1}{dt^2}.$$

De là résulte la première équation du mouvement, à laquelle les deux autres seraient analogues :

$$(2)\qquad (\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u-\rho_1\frac{d^2u_1}{dt^2}=\rho\frac{d^2u}{dt^2}.$$

On substituera à u_1, dans le premier membre, son expression suivant les premières puissances de u, v, w, et de leurs dérivées en x, y, z.

Nous allons étudier la forme de u_1, v_1, w_1, et les vibrations correspondantes de l'éther, dans les milieux isotropes, et dans ceux qui diffèrent peu d'être isotropes et d'être symétriques.

Nous appelons *ici* milieu *isotrope* celui dont les équations de mouvement ne changent pas, lorsqu'on fait tourner d'une manière quelconque autour de l'origine les axes des coordonnées, en les laissant toujours rectangulaires et de même sens relatif.

Nous appelons *symétrique* tout milieu dont les équations de mouvement, pour un certain système de coordonnées rectangulaires, restent les mêmes, lorsqu'on change en son opposée la direction d'un quelconque des axes. Enfin quand un milieu ne sera symétrique par rapport à aucun système de plans coordonnés rectangulaires, nous l'appellerons *dissymétrique*.

Il est clair d'après cela qu'un milieu isotrope sera symétrique lorsque, sans changer ses équations de mouvement, on pourra disposer les

axes de toutes les manières, pourvu qu'on maintienne leur rectangularité; et qu'il sera au contraire dissymétrique, si on peut seulement les faire tourner d'une manière arbitraire autour de l'origine. Les milieux habituellement appelés isotropes seront, *dans ce Mémoire*, désignés sous le nom d'*isotropes-symétriques*; les liquides doués d'un pouvoir rotatoire sont au contraire *isotropes-dissymétriques*.

Les milieux presque isotropes et presque symétriques dont nous nous occuperons, auront des équations de mouvement peu différentes pour les divers systèmes d'axes rectangulaires de même sens relatif, et, parmi ces systèmes, en admettront un pour lequel ils différeront, bien moins que pour tous les autres, d'être symétriques. Tels sont tous les cristaux transparents observés jusqu'à ce jour.

§ II. — *Formules de u_1, v_1, w_1, dans les milieux isotropes.*

Dans un milieu isotrope, les expressions de u_1, v_1, w_1 seront les mêmes pour tout système d'axes rectangulaires de même sens relatif. Par exemple, l'expression de u_1 ne devra pas changer : si l'on change à la fois x en $-x$, y en $-y$, u en $-u$, v en $-v$, u_1 en $-u_1$; ou bien x en $-x$, z en $-z$, u en $-u$, w en $-w$, u_1 en $-u_1$; ou encore y en $-y$, z en $-z$, v en $-v$, w en $-w$. En effet, tous ces changements reviennent à faire tourner d'une demi-circonférence le système de deux axes autour du troisième. Après cette première réduction, il ne restera plus dans l'expression de u_1 que les termes en

$$u,\ \frac{dv}{dz},\ \frac{dw}{dy},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2u}{dy^2},\ \frac{d^2u}{dz^2},\ \frac{d^2v}{dx\,dy},\ \frac{d^2w}{dx\,dz},$$

si l'on s'arrête aux dérivées du second ordre.

On peut aussi permuter entre eux deux des axes, pourvu qu'on change en même temps en son opposée la direction du troisième, par exemple, transformer y en z, v en w, et z en y, w en v, pourvu qu'on change en même temps x en $-x$, u en $-u$, u_1 en $-u_1$. On reconnaît ainsi que les coefficients de $\frac{dv}{dz}$, $\frac{dw}{dy}$ sont égaux en valeur absolue, mais de signe contraire, tandis que ceux de $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2v}{dx\,dy}$ sont respective-

ment égaux à ceux de $\frac{d^2u}{dz^2}$, $\frac{d^2w}{dx\,dz}$. L'expression de u_1 est donc de la forme

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&u_1 = Au + B\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) + C\frac{d\theta}{dx} + D\Delta_2 u + E\frac{d^2u}{dx^2},\\
&\text{en changeant respectivement les axes des } x, \text{ des } y, \text{ des } z, \text{ en}\\
&\quad\text{ceux des } y, \text{ des } z, \text{ des } x, \text{ on en déduit}\\
&v_1 = Av + B\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + C\frac{d\theta}{dy} + D\Delta_2 v + E\frac{d^2v}{dy^2},\\
&\text{et de même}\\
&w_1 = Aw + B\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + C\frac{d\theta}{dz} + D\Delta_2 w + E\frac{d^2w}{dz^2}.
\end{aligned}\right.$$

Supposons actuellement qu'on fasse tourner, autour de l'axe des z, les deux axes des x et des y d'un angle infiniment petit ι. Soient x', y', z'; u', v', w'; u'_1, v'_1, w'_1, les coordonnées d'équilibre et les déplacements, dans le nouveau système d'axes infiniment voisin du premier, des molécules dont x, y, z; u, v, w; u_1, v_1, w_1 sont les coordonnées et les déplacements pareils dans le système primitif. Nous aurons les formules de transformation

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'} - \iota\frac{d}{dy'}, &&\frac{d}{dy} = \frac{d}{dy'} + \iota\frac{d}{dx'}, &&\frac{d}{dz} = \frac{d}{dz'};\\
&u = u' - \iota v', &&v = v' + \iota u', &&w = w';\\
&u_1 = u'_1 - \iota v'_1, &&v_1 = v'_1 + \iota u'_1, &&w_1 = w'_1.
\end{aligned}\right.$$

Tirons de ces formules les expressions de u_1, v_1, w_1, et celles de u, v, w et de leurs dérivées partielles en x, y, z, en fonction des quantités pareilles relatives aux nouveaux axes, puis portons-les dans les relations (3). Il faudra et il suffira que les termes en ι aient somme égale dans les deux membres de chacune de ces relations, pour que le milieu soit isotrope autour de l'axe des z. On trouve pour cela la condition nécessaire et suffisante $E = 0$. Il est clair que l'isotropie autour des autres axes des coordonnées, et, par suite, l'isotropie absolue du milieu, donnera la même condition. Donc les expressions définitives de u_1, v_1, w_1 s'obtiendront en faisant, dans les relations (3), $E = 0$.

Si le milieu est isotrope-symétrique, ces relations subiront une nouvelle réduction. La première d'entre elles ne devra changer, ni par

les transformations de x en $-x$, u en $-u$, u_1 en $-u_1$, ni par celles de y en $-y$, v en $-v$, ni par celles de z en $-z$, w en $-w$. On devra donc poser $B=0$, et il n'y aura plus de terme contenant les dérivées premières de u, v, w.

§ III. — *Dispersion et polarisation rotatoire : lois approchées.*

Nous pouvons maintenant étudier les vibrations de l'éther dans les milieux isotropes. Portons la valeur approchée de u_1 dans l'équation (2), et celle-ci deviendra

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u-\rho_1\frac{d^2}{dt^2}\left[Au+B\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)+C\frac{d\theta}{dx}+D\Delta_2 u\right]=\rho\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Prenons les intégrales simples de cette équation et des deux autres pareilles, sous la forme

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}u&=Me^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{mx+ny+pz}{\omega}\right)\sqrt{-1}},\\ v&=Ne^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{mx+ny+pz}{\omega}\right)\sqrt{-1}},\\ w&=Pe^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{mx+ny+pz}{\omega}\right)\sqrt{-1}};\end{aligned}\right.$$

m, n, p sont les cosinus des angles que fait avec les axes une direction quelconque, τ et ω deux constantes réelles, enfin M, N, P trois coefficients généralement imaginaires. Il est clair que les parties réelles de u, v, w vérifieront séparément les équations du mouvement : elles représenteront des ondes planes, perpendiculaires à la direction (m, n, p), ayant ω pour vitesse de propagation, et $\tau\omega$ pour longueur d'onde ou τ pour durée de la vibration.

Observons que

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[B\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)+C\frac{d\theta}{dx}+D\Delta_2 u\right]=-\frac{4\pi^2}{\tau^2}\left[B\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)+C\frac{d\theta}{dx}+D\Delta_2 u\right],$$

et la première équation du mouvement deviendra

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned}&\left(\lambda+\mu+\frac{4C\pi^2\rho_1}{\tau^2}\right)\frac{d\theta}{dx}+\left(\mu+\frac{4D\pi^2\rho_1}{\tau^2}\right)\Delta_2 u+\frac{4B\pi^2\rho_1}{\tau^2}\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)\\ &\quad=(\rho+\rho_1 A)\frac{d^2u}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

Supposons pour un instant que le milieu soit isotrope-symétrique, ou que $B = 0$. On voit qu'il se comportera comme un corps homogène d'élasticité constante, qui aurait pour densité $\rho + \rho_1 A$, et pour coefficients d'élasticité ceux de l'éther, augmentés chacun d'un terme très-petit inversement proportionnel à τ^2. Les carrés des vitesses de propagation des ondes longitudinales et des ondes transversales seront respectivement (*voir* LAMÉ, *Leçons sur l'élasticité*, § 59)

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho + \rho_1 A}\left[1 + \frac{4(C+D)\pi^2\rho_1}{\lambda + 2\mu}\frac{1}{\tau^2}\right], \quad \frac{\mu}{\rho + \rho_1 A}\left(1 + \frac{4D\pi^2\rho_1}{\mu}\frac{1}{\tau^2}\right).$$

Ces vitesses varient avec τ conformément à la formule approchée que l'expérience a donnée pour les ondes transversales. On a reconnu ainsi que le coefficient D est négatif, ou que la vitesse de propagation augmente avec la longueur d'onde. Toutefois il doit être positif pour la vapeur d'iode; car, dans cette vapeur, la vitesse de propagation diminue avec la longueur d'onde.

Quant à A, sa signification dans les formules (3) montre qu'il est essentiellement positif. En effet, l'éther doit entraîner les molécules pondérables dans le sens suivant lequel il se meut lui-même. Par suite, ce coefficient a pour effet de rendre les vitesses de propagation des ondes plus petites dans l'éther des corps que dans l'éther libre : ce qui est encore conforme à l'expérience.

Revenons au cas général de B quelconque, et posons, afin d'abréger,

$$(7) \qquad \frac{\lambda + \mu + \frac{4\pi^2 C\rho_1}{\tau^2}}{\rho + \rho_1 A} = K, \quad \frac{\mu + \frac{4\pi^2 D\rho_1}{\tau^2}}{\rho + \rho_1 A} = L, \quad \frac{\rho_1 B}{\rho + \rho_1 A} = k,$$

Nous pouvons supposer, à cause de l'isotropie, que le plan des xy ait été pris parallele aux ondes, ou que l'on ait $m = 0$, $n = 0$, $p = 1$. Alors les valeurs (5) de u, v, w ne varient qu'avec z et t, et changent les trois équations du mouvement en

$$(8) \qquad \begin{cases} \left(\frac{L}{\omega^2} - 1\right) M + \frac{2\pi k}{\tau\omega} N\sqrt{-1} = 0, \\ \left(\frac{L}{\omega^2} - 1\right) N - \frac{2\pi k}{\tau\omega} M\sqrt{-1} = 0, \\ \left(\frac{K + L}{\omega^2} - 1\right) P = 0, \end{cases}$$

Ajoutons les deux premières de ces équations, après les avoir respectivement multipliées par N et par $-$ M. Elles donneront

$$(9)\quad \begin{cases} k(M^2+N^2)=0 \quad \text{ou} \quad N=\pm M\sqrt{-1}, \\ \text{et ensuite} \quad \left(\frac{L}{\omega^2}-1\mp\frac{2\pi k}{\tau\omega}\right)M=0. \end{cases}$$

On satisfait à la troisième (8) en faisant, soit $\omega^2=K+L$, soit $P=0$.

Dans le premier cas, les relations (9) donnent $M=0$, $N=0$: les vibrations sont longitudinales, et les ondes se propagent avec la même vitesse $\sqrt{K+L}$ que si B était nul, ou que le milieu fût symétrique.

Dans le second cas, les vibrations sont transversales, c'est-à-dire se font dans les plans des ondes. La deuxième relation (9) donne

$$\omega=\mp\frac{\pi k}{\tau}+\sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{\tau^2}+L};$$

le radical doit toujours être pris positif, car, avec le signe $-$, il donnerait pour ω des valeurs négatives.

Appelons ω_1, ω_2 les deux racines, la première correspondant au signe $+$, et à $N=-M\sqrt{-1}$. Si nous prenons $M=Ie^{\varphi_1\sqrt{-1}}$, I et φ_1 étant réels, les parties réelles de u, v, ou les déplacements correspondants à cette première racine, seront

$$u=I\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{z}{\omega_1}+\varphi_1\right),\quad v=I\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{z}{\omega_1}+\varphi_1\right).$$

La courbe décrite par chaque molécule est le cercle $u^2+v^2=I^2$: il est parcouru dans le sens direct, c'est-à-dire en allant de l'axe des x vers celui des y.

Appelons φ_2 une autre constante, et les déplacements correspondants à la seconde valeur de ω seront

$$u=I\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{z}{\omega_2}+\varphi_2\right),\quad v=-I\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{z}{\omega_2}+\varphi_2\right).$$

La trajectoire est encore un cercle, mais décrit en sens inverse du premier.

Si l'on veut avoir des vibrations rectilignes, on n'a qu'à prendre la somme de ces deux intégrales. On trouve ainsi, pour nouvelles valeurs des déplacements,

$$u = 2\mathrm{I}\cos\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}z+\varphi_1-\varphi_2\right)\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\omega_2}z+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right),$$

$$v = 2\mathrm{I}\sin\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}z+\varphi_1-\varphi_2\right)\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\omega_2}z+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right).$$

L'angle que fait la vibration avec l'axe de x est

$$\psi = \frac{\pi}{\tau}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1\omega_2}z+\varphi_1-\varphi_2\right) = \frac{2\pi^2 h}{\mathrm{L}\tau^2}z+\text{const.}$$

A mesure que l'onde avance suivant l'axe des z, le plan de polarisation tourne, dans le sens de la vibration circulaire dont la vitesse de propagation est la plus grande, d'un angle qui varie proportionnellement au chemin parcouru, et à peu près en raison inverse de τ^2 ou du carré de la longueur d'onde : cette dernière loi approximative a été trouvée expérimentalement par M. Biot.

La vitesse de l'onde est

$$\frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2} = \frac{\mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{L}+\frac{\pi^2 h^2}{\tau^2}}};$$

elle se réduit, sauf erreur du second ordre, à $\sqrt{\mathrm{L}}$, lorsque h est très-petit : c'est ce qui arrive chez tous les corps.

§ IV. — *Lois plus exactes.*

Il est aisé d'obtenir pour chaque onde en particulier, dans le cas d'un milieu isotrope, l'expression aussi approchée qu'on voudra de u_1, v_1, w_1, et par suite les formules de la dispersion et de la polarisation rotatoire. Il suffit de prendre, comme au paragraphe précédent, le plan des xy parallèle aux ondes. Alors u, v, w ne dépendent que de z et de t. Les termes contenant les dérivées d'ordre n, qui entrent dans l'expression de u_1, seront tout au plus au nombre de trois, savoir $\frac{d^n u}{dz^n}$, $\frac{d^n v}{dz^n}$, $\frac{d^n w}{dz^n}$.

Mais les remarques faites au commencement du § II les réduiront encore : si n est pair, il ne restera que le terme en $\frac{d^n u}{dz^n}$; si n est impair, il ne restera que celui en $\frac{d^n v}{dz^n}$. De même, l'expression de v_1 ne contiendra pas d'autre terme d'ordre n que celui en $\frac{d^n v}{dz^n}$ si n est pair, et celui en $\frac{d^n u}{dz^n}$ si n est impair. Ces termes auront même coefficient dans u_1 et dans v_1 pour n pair, et des coefficients égaux, mais de signe contraire, pour n impair; car, si l'on échange entre eux les deux axes des x et des y en changeant en même temps z en $-z$, la formule de u_1 deviendra celle de v_1 et réciproquement. Quant à la formule de w_1, elle ne contient pas de terme d'ordre n si n est impair, et elle contient seulement le terme en $\frac{d^n w}{dz^n}$ si n est pair. Les expressions de u_1, v_1, w_1 seront donc de la forme

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= Qu + R\frac{dv}{dz} + Q'\frac{d^2 u}{dz^2} + R'\frac{d^3 v}{dz^3} + Q''\frac{d^4 u}{dz^4} + \ldots,\\ v_1 &= Qv - R\frac{du}{dz} + Q'\frac{d^2 v}{dz^2} - R'\frac{d^3 u}{dz^3} + Q''\frac{d^4 v}{dz^4} - \ldots,\\ w_1 &= Sw \qquad\quad + S'\frac{d^2 w}{dz^2} \qquad\qquad + S''\frac{d^4 w}{dz^4} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, les divers coefficients Q, Q', Q'',..., R, R',..., S, S',... seront arbitraires, excepté S qui, nous le savons, est égal à Q. En effet on reconnaît aisément, par les formules (3) où $E = 0$, et en observant que l'expression symbolique Δ_2 reste la même dans tous les systèmes de coordonnées rectangulaires, que les formules suivantes sont isotropes, quels que soit leurs coefficients :

$$\begin{aligned} u_1 = Qu + R\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) + Q'\Delta_2 u + (S' - Q')\frac{d\theta}{dx} + R'\Delta_2\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)\\ + Q''\Delta_2\Delta_2 u + (S'' - Q'')\Delta_2\frac{d\theta}{dx} + R''\Delta_2\Delta_2\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) + \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 = Qv + R\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + Q'\Delta_2 v + (S' - Q')\frac{d\theta}{dy} + R'\Delta_2\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right)\\ + Q''\Delta_2\Delta_2 v + (S'' - Q'')\Delta_2\frac{d\theta}{dy} + \ldots,\end{aligned}$$

$$w_1 = Qw + R\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) + Q'\Delta_2 w + (S' - Q')\frac{d\theta}{dz} + R'\Delta_2\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right)$$
$$+ Q''\Delta_2\Delta_2 w + (S'' - Q'')\Delta_2\frac{d\theta}{dz} + \ldots.$$

Or, si on y suppose u, v, w indépendants de x et de y, ces formules deviennent identiques à (10), pourvu que la condition $S = Q$ soit vérifiée.

Portons dans (10) les expressions de u, v, w données par

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right)\sqrt{-1}},$$

et observons que

$$\frac{d^3 u}{dz^3} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2\omega^2}\frac{du}{dz}, \quad \frac{d^5 u}{dz^5} = \frac{16\pi^4}{\tau^4\omega^4}\frac{du}{dz}, \ldots; \quad \frac{d^4 u}{dz^4} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2\omega^2}\frac{d^2 u}{dz^2}, \quad \frac{d^6 u}{dz^6} = \frac{16\pi^4}{\tau^4\omega^4}\frac{d^2 u}{dz^2}, \ldots.$$

Les déplacements u_1, v_1, w_1 prendront la forme qu'ils avaient au paragraphe précédent, dans le cas d'une onde perpendiculaire à l'axe des z,

$$(10\,bis)\quad \begin{cases} u_1 = Au + B\dfrac{dv}{dz} + D\dfrac{d^2 u}{dz^2}, \quad v_1 = Av - B\dfrac{du}{dz} + D\dfrac{d^2 v}{dz^2}, \\ w_1 = Aw + (C + D)\dfrac{d^2 w}{dz^2}, \end{cases}$$

On aura donc toutes les formules du paragraphe précédent à partir de (7); seulement B, C, D seront ici des séries rapidement convergentes, ordonnées suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$.

Si le milieu est légèrement dissymétrique, la formule qui termine le paragraphe précédent donne, pour calculer le carré de la vitesse de propagation des ondes transversales à vibrations rectilignes, l'équation

$$\omega^2 = L, \quad \text{ou bien} \quad \omega^2 = \frac{\mu + \dfrac{4\pi^2\rho_1}{\tau^2}D}{\rho + \rho_1 A}.$$

De cette équation où D est une série rapidement convergente ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$, on tirera par approxi-

mations successives la valeur de ω^2, sous la forme

$$(11) \qquad \omega^2 = e\left(1 + \frac{e'}{\tau^2} + \frac{e''}{\tau^4} + \cdots\right).$$

C'est la formule générale de la dispersion dans les corps isotropes, c'est-à-dire celle qui donne, en fonction de la longueur d'onde ou de la durée de la vibration, la vitesse de propagation des ondes.

L'angle ψ dont tourne le plan de polarisation sera, sauf une constante,

$$\psi = \frac{2\pi^2 k}{L\tau^2} z = \frac{2\pi^2}{\omega^2\tau^2} \frac{\rho_1 B}{\rho + \rho_1 A} z.$$

En substituant à B la série que représente cette quantité, et puis à ω^2 sa valeur (11), l'angle ψ pourra être développé en série de la forme

$$(12) \qquad \psi = \frac{f}{\tau^2}\left(1 + \frac{f'}{\tau^2} + \frac{f''}{\tau^2} + \cdots\right) z.$$

Tous les coefficients e, e', e'',..., f, f', f'' sont indépendants.

Si nous prenons dans ψ deux termes seulement, et que, supposant f' négatif, nous mettions le signe en évidence, nous aurons

$$\psi = \frac{f}{\tau^2}\left(1 - \frac{f'}{\tau^2}\right) z.$$

L'angle dont tourne le plan de polarisation ne variera plus, comme au paragraphe précédent, en raison inverse du carré de la longueur d'onde : mais il s'annulera, en changeant de signe, pour $\tau^2 = f'$, et sa valeur absolue deviendra maxima pour $\tau^2 = 2f'$. C'est ce qui arrive, comme M. Biot l'a reconnu, dans des dissolutions d'acide tartrique [*].

---

[*] Les expressions (10) de u_1, v_1, w_1 ne conviennent pas seulement au cas d'un milieu isotrope autour d'un axe pris pour celui des z; elles conviennent aussi au cas d'un cristal à un seul axe optique, pour l'onde normale à cet axe.

En effet, les cristaux à un axe ont pour type, soit le prisme droit à base carrée, soit le prisme droit à base hexagonale régulière. L'axe des z étant celui du prisme, on peut adopter deux axes rectangulaires des x et des y, le premier perpendiculaire sur le milieu d'un côté du carré ou de l'hexagone, le second perpendiculaire à un autre côté

§ V. — *Double réfraction rectiligne.*

Considérons actuellement un milieu presque isotrope et presque symétrique : ce qui est le cas des cristaux naturels au point de vue des ondes lumineuses.

Les valeurs de u_1, v_1, w_1, dans un milieu rapporté à trois points plans coordonnés de symétrie, doivent satisfaire à la condition de ne pas changer de forme, lorsqu'on change arbitrairement en son opposée la direction d'un quelconque des axes. Si l'on s'arrête aux dérivées du second ordre, cette condition revient à dire que u_1 contient seulement les termes en u, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, $\frac{d^2v}{dx\,dy}$, $\frac{d^2w}{dx\,dz}$.

Le milieu proposé étant presque isotrope, u_1, v_1, w_1 y ont la forme (3) avec $E = 0$, sauf erreur très-petite, et cela dans tous les systèmes d'axes rectangulaires de même sens relatif. Mais de plus, pour un système particulier d'axes, le milieu est presque symétrique, c'est-à-dire se rapproche incomparablement plus d'être symétrique que pour tout autre système. Cela fait que, dans u_1, à part les termes en u, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, $\frac{d^2v}{dx\,dy}$, $\frac{d^2w}{dx\,dz}$, tous les autres auront avec ce système d'axes des coefficients incomparablement plus petits que ceux qu'ils

---

du carré ou passant par un sommet de l'hexagone. Si l'on fait tourner de 180 degrés le système de deux quelconques des axes autour du troisième, les nouveaux axes seront par rapport au cristal dans une position semblable à celle des premiers, et les formules de u_1, v_1, w_1 n'auront pas changé. Donc, pour l'onde perpendiculaire aux z, ces quantités auront des expressions de la forme

$$(\alpha)\quad \begin{cases} u_1 = Qu + R\,\frac{dv}{dz} + Q'\,\frac{d^2u}{dz^2} + R'\,\frac{d^3v}{dz^3} + Q''\,\frac{d^4u}{dz^4} + \ldots, \\ v_1 = Q_1 v + R_1\,\frac{du}{dz} + Q'_1\,\frac{d^2v}{dz^2} + R'_1\,\frac{d^3u}{dz^3} + Q''_1\,\frac{d^4v}{dz^4} + \ldots, \\ w_1 = Sw \qquad\qquad + S'\,\frac{d^2w}{dz^2} \qquad\qquad + S''\,\frac{d^4w}{dz^4} + \ldots. \end{cases}$$

Actuellement faisons tourner, dans le plan des xy, les deux axes des x et des y, d'un angle α égal à 90 ou à 60 degrés, de manière à obtenir deux nouveaux axes des x' et des y' disposés par rapport au cristal dans une position analogue à celle des

avaient avec les autres systèmes. En convenant de négliger ceux d'entre eux qui étaient déjà très-petits dans tout système d'axes, il ne restera que le terme $B\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)$. Quant aux termes en u, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, $\frac{d^2v}{dx\,dy}$, $\frac{d^2w}{dx\,dz}$, ils pourront avoir respectivement des coefficients qui diffèrent de A, D + C, D, D, C, C de quantités très-petites par rapport à A, D, C eux-mêmes. Ceux qui contiennent les dérivées secondes, influant déjà assez peu sur le mouvement, peuvent être supposés les mêmes que dans le cas de l'isotropie. Donc le terme en u aura seul, outre la partie isotrope Au, une partie très-petite $A\alpha u$.

---

premiers. Soient u', v', u'_1, v'_1 les déplacements des molécules par rapport au nouveau système des x' et des y'. Nous aurons les formules de transformation

$$u = u'\cos\alpha - v'\sin\alpha,$$
$$v = u'\sin\alpha + v'\cos\alpha;$$
$$u_1 = u'_1\cos\alpha - v'_1\sin\alpha,$$
$$v_1 = u'_1\sin\alpha + v'_1\cos\alpha.$$

Ces valeurs de u, v, u_1, v_1, portées dans les deux premières relations (α), les changent en

$$\left(u'_1 - Qu' - R\,\frac{dv'}{dz} - \cdots\right)\cos\alpha - \left(v'_1 - Qv' + R\,\frac{du'}{dz} - \cdots\right)\sin\alpha = 0,$$
$$\left(u'_1 - Q_1u' + R_1\frac{dv'}{dz} - \cdots\right)\sin\alpha + \left(v'_1 - Q_1v' - R_1\frac{du'}{dz} - \cdots\right)\cos\alpha = 0.$$

Les coefficients de $\cos\alpha$ sont nuls identiquement, car u'_1, v'_1 doivent avoir les mêmes expressions que u_1, v_1; donc, $\sin\alpha$ n'étant pas nul, ses deux coefficients doivent l'être, et, comparés à ceux de $\cos\alpha$, ils donnent

$$Q_1 = Q, \quad R_1 = -R, \ldots;$$

ce qui identifie les relations (α) aux formules (10).

Il en résulte que les cristaux à un axe se comportent, pour l'onde normale à l'axe, comme les milieux isotropes, et que toutes les formules de la dispersion et de la polarisation rotatoire établies ci-dessus leur sont applicables. Seulement les deux coefficients Q, S ne sont plus égaux : mais cela n'influe en rien sur les ondes transversales.

Les expressions de u_1, v_1, w_1 seront ainsi

$$(13)\quad \begin{cases} u_1 = A(1+\alpha)u + B\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right) + C\dfrac{d\theta}{dx} + D\Delta_2 u, \\ v_1 = A(1+\beta)v + B\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right) + C\dfrac{d\theta}{dy} + D\Delta_2 v, \\ w_1 = A(1+\gamma)w + B\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right) + C\dfrac{d\theta}{dz} + D\Delta_2 w; \end{cases}$$

les coefficients α, β, γ, B sont très-petits.

Si nous rappelons que, dans le cas d'un mouvement vibratoire,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[B\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)+C\frac{d\theta}{dx}+D\Delta_2 u\right]=-\frac{4\pi^2}{\tau^2}\left[B\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)+C\frac{d\theta}{dx}+D\Delta_2 u\right],$$

et si nous adoptons, afin d'abréger, les notations (7), et celles-ci,

$$(14)\qquad -\frac{\rho_1 A\alpha}{\rho+\rho_1 A}=a,\quad -\frac{\rho_1 A\beta}{\rho+\rho_1 A}=b,\quad -\frac{\rho_1 A\gamma}{\rho+\rho_1 A}=c,$$

la valeur de u_1, portée dans (2), donnera la première des trois équations du mouvement

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = K(1+a)\dfrac{d\theta}{dx} + L(1+a)\Delta_2 u + \dfrac{4\pi^2}{\tau^2}k\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right), \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} = K(1+b)\dfrac{d\theta}{dy} + L(1+b)\Delta_2 v + \dfrac{4\pi^2}{\tau^2}k\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right), \\ \dfrac{d^2w}{dt^2} = K(1+c)\dfrac{d\theta}{dz} + L(1+c)\Delta_2 w + \dfrac{4\pi^2}{\tau^2}k\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right). \end{cases}$$

Nous supposerons qu'on ait choisi les axes de telle sorte que b soit compris entre a et c. Cela n'empêche pas de les prendre de sens déterminé, de prendre par exemple l'axe des y à droite de celui des x, pour un observateur qui aurait les pieds à l'origine et la tête du côté des z positifs : il suffit pour cela de changer, si c'est nécessaire, un des axes en son prolongement.

Dans tous les corps biréfringents connus, la quantité k est si petite, qu'on peut la négliger à une première approximation, et qu'il a même été le plus souvent impossible de constater son existence. Si nous fai-

sons $k = 0$, les équations (15) seront un cas particulier des équations (8) étudiées dans notre Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés [*]. Il suffira, pour les leur identifier, de poser dans ces équations (8),

$$(15\ bis)\qquad \lambda' = \lambda = K,\quad \mu = \rho = L,\quad \sigma = 0,\quad \nu = 0.$$

On aura ainsi la théorie de la double réfraction rectiligne de Fresnel, puisque $\sigma = 0$ (*voir* § VIII du Mémoire cité); mais les vibrations ne seront qu'à peu près transversales, et non pas rigoureusement comme le supposait Fresnel.

Les coefficients K, L contiennent la longueur d'onde, et donnent la partie principale de la dispersion; cette partie est la même que pour un corps isotrope. Si on voulait connaître l'autre partie, il faudrait pousser plus loin l'approximation.

Lorsqu'on s'arrête aux termes du même ordre de grandeur que a, b, c, nous avons vu, au § IX du Mémoire cité, que la direction des axes optiques est évaluée avec une erreur du premier ordre. Donc, si l'on construisait l'onde exacte, la direction d'un même axe optique serait généralement variable avec la longueur d'onde d'une quantité assez petite, mais sensible; ce fait constitue la dispersion des axes optiques.

§ VI. — *Double réfraction elliptique.*

Voyons maintenant quelle peut être, dans les équations (15), l'influence des termes en k sur une onde plane de direction quelconque.

Si ces termes étaient nuls, une onde plane de direction quelconque pourrait correspondre à trois vibrations rectilignes sensiblement rectangulaires : deux quasi-transversales, une quasi-longitudinale (*voir* les §§ II, III, IV du Mémoire cité). Prenons de nouveaux axes rectangulaires disposés dans le même sens relatif que les premiers; choisissons ceux des x' et des y' parallèles aux ondes, et faisant avec les vibrations quasi-transversales des angles aussi petits ou aussi voisins de deux droits que possible, et prenons l'axe des z' dans le sens suivant

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, p. 221.

lequel marchent les ondes ; ce dernier fera par conséquent un angle très-petit avec la vibration quasi-longitudinale. L'onde sera parallèle au plan des $x'y'$, et les déplacements u', v', w', pris dans le même système d'axes, dépendront seulement de z' et de t. Si donc nous faisons abstraction des termes en k, les équations du mouvement seront de la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u'}{dt^2} = \mathrm{F}\,\dfrac{d^2u'}{dz'^2} + \mathrm{G}\,\dfrac{d^2v'}{dz'^2} + \mathrm{H}\,\dfrac{d^2w'}{dz'^2}, \\ \dfrac{d^2v'}{dt^2} = \mathrm{F}'\,\dfrac{d^2v'}{dz'^2} + \mathrm{G}'\,\dfrac{d^2u'}{dz'^2} + \mathrm{H}'\,\dfrac{d^2w'}{dz'^2}, \\ \dfrac{d^2w'}{dt^2} = \mathrm{F}''\,\dfrac{d^2w'}{dz'^2} + \mathrm{G}''\,\dfrac{d^2u'}{dz'^2} + \mathrm{H}''\,\dfrac{d^2v'}{dz'^2}. \end{cases}$$

Portons-y les valeurs de u', v', w', données par

$$(16\,bis)\qquad \frac{u'}{\mathrm{M}} = \frac{v'}{\mathrm{N}} = \frac{w'}{\mathrm{P}} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z'}{\omega}\right)\sqrt{-1}};$$

elles deviendront

$$(17)\qquad \begin{cases} (\mathrm{F} - \omega^2)\mathrm{M} + \mathrm{GN} + \mathrm{HP} = 0, \\ (\mathrm{F}' - \omega^2)\mathrm{N} + \mathrm{G}'\mathrm{M} + \mathrm{H}'\mathrm{P} = 0, \\ (\mathrm{F}'' - \omega^2)\mathrm{P} + \mathrm{G}''\mathrm{M} + \mathrm{H}''\mathrm{N} = 0. \end{cases}$$

Nous savons que ces relations doivent être vérifiées, si on y fait deux quelconques des quantités M, N, P très-petites de l'ordre de a, b, c, la troisième restant finie. Il en résulte que les coefficients G, H, G′, H′, G″, H″ sont au plus de l'ordre de a, b, c, et que les carrés des trois vitesses de propagation sont respectivement égaux, sauf erreur du second ordre, à F, F′, F″. Si nous considérons spécialement les deux vibrations quasi-transversales, en observant que les deux valeurs correspondantes de ω^2 diffèrent très-peu, nous verrons que G, G′ sont seulement du second ordre en a, b, c. Dans l'étude de ces vibrations, on pourra donc réduire les deux premières équations du mouvement, sauf les termes en k, à

$$(18)\qquad \frac{d^2u'}{dt^2} = \mathrm{F}\,\frac{d^2u'}{dz'^2}, \quad \frac{d^2v'}{dt^2} = \mathrm{F}'\,\frac{d^2v'}{dz'^2}.$$

Je suppose qu'on ait pris l'axe des x' dans le sens de la vibration qui correspond à la plus grande vitesse de propagation, ou dans le sens de l'autre vibration, suivant que a est $>$ ou $<$ c. En appelant U, U' les angles que fait la normale à l'onde avec les axes optiques, nous aurons, sauf erreur du second ordre [*voir*, dans le *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, la formule (30), où r^2 ne diffère de ω^2 que d'une quantité négligeable du second ordre],

$$(19)\quad \begin{cases} F = L\left[1 + \dfrac{a+c}{2} - \dfrac{a-c}{2}\cos(U+U')\right], \\ F' = L\left[1 + \dfrac{a+c}{2} - \dfrac{a-c}{2}\cos(U-U')\right]. \end{cases}$$

Quant aux termes en k, ils sont les mêmes dans tout système d'axes rectangulaires de même sens relatif; avec le nouveau système de coordonnées ils ne donneront rien dans la troisième équation (16) du mouvement, tandis qu'ils augmenteront respectivement les seconds membres des deux premières de $\dfrac{4\pi^2}{\tau^2}\,k\,\dfrac{dv'}{dz'}$ et de $-\dfrac{4\pi^2}{\tau^2}\,k\,\dfrac{du'}{dz'}$. Les vraies équations ainsi obtenues, on y portera les valeurs (16 *bis*). La troisième donnera toujours

$$(F'' - \omega^2)P + G''M + H''N = 0.$$

Comme G'' et H'' sont très-petits, il en résulte qu'on aura, ou bien $F'' - \omega^2$ très-petit, ou bien P très-petit.

Dans le premier cas, les deux premières équations du mouvement donneront M et N très-petits : donc l'onde correspondante est quasi-longitudinale; de plus la troisième équation donne $\omega^2 = F''$, comme si k était nul.

Dans le deuxième cas, la vibration est quasi-transversale. On peut négliger les termes en G, G', H, H', qui sont du second ordre, et les équations (18), avec les termes en k, deviennent

$$(20)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{F}{\omega^2} - 1\right)M + \dfrac{2\pi k}{\tau\omega}N\sqrt{-1} = 0, \\ \left(\dfrac{F'}{\omega^2} - 1\right)N - \dfrac{2\pi k}{\tau\omega}M\sqrt{-1} = 0. \end{cases}$$

Éliminons le rapport $\frac{N}{M}$; nous obtiendrons l'équation des vitesses,

$$\left(\frac{F}{\omega^2}-1\right)\left(\frac{F'}{\omega^2}-1\right)=\left(\frac{2\pi k}{\tau\omega}\right)^2,$$

qui, résolue en négligeant les quantités très-petites par rapport à k, donne

$$\omega^2=\frac{F+F'}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{F-F'}{2}\right)^2+\left(\frac{2\pi k\sqrt{L}}{\tau}\right)^2}.$$

Appelons ω_1 la racine qu'on obtient en prenant le radical avec le signe de $F-F'$, et ω_2 l'autre racine. Les valeurs (19) de F, F' permettent d'obtenir ces deux racines en U et U'. Leur différence est

$$(21)\quad \omega_1-\omega_2=\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2\sqrt{L}}=\sqrt{\left[\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2}\sin U\sin U'\right]^2+\left(\frac{2\pi k}{\tau}\right)^2}.$$

Les équations (20) donneront ensuite le rapport $\frac{N}{M}$

$$\frac{N}{M}=-\frac{2\pi k}{\tau\omega}\frac{\omega^2}{\omega^2-F'}\sqrt{-1}=\frac{2\pi k\sqrt{L}}{\tau}\cdot\frac{-\sqrt{-1}}{\frac{F-F'}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{F-F'}{2}\right)^2+\left(\frac{2\pi k\sqrt{L}}{\tau}\right)^2}},$$

ou bien

$$\frac{N}{M}=\frac{2\pi k}{\tau}\cdot\frac{-\sqrt{-1}}{\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2}\sin U\sin U'\pm\sqrt{\left[\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2}\sin U\sin U'\right]^2+\left(\frac{2\pi k}{\tau}\right)^2}}.$$

Appelons q le coefficient de $-\sqrt{-1}$ dans cette expression de $\frac{N}{M}$, lorsqu'on prend le radical avec le signe de $F-F'$, c'est-à-dire de $a-c$. Cela donne

$$N=-Mq\sqrt{-1},\quad \text{si l'on prend la première racine } \omega_1,$$

$$M=-Nq\sqrt{-1},\quad \text{si l'on prend la seconde racine } \omega_2.$$

Enfin posons $M=Ie^{\varphi_1\sqrt{-1}}$ dans le premier cas, et $N=Ie^{\varphi_1\sqrt{-1}}$ dans le

second, I, φ_1, φ_2 désignant des quantités réelles; puis, gardons pour intégrales simples les parties réelles de u', v'. Nous aurons les équations des deux ondes

$$u' = I\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z'}{\omega_1} + \varphi_1\right), \quad v' = Iq\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z'}{\omega_1} + \varphi_1\right)$$

et

$$u' = Iq\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z'}{\omega_2} + \varphi_2\right), \quad v' = I\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z'}{\omega_2} + \varphi_2\right).$$

La trajectoire des molécules dans la première onde est une ellipse dont le grand axe est parallèle aux x', le petit axe aux y', et qui est décrite, si q est positif, en tournant dans le sens du premier de ces axes vers le second. Dans la deuxième onde, la trajectoire est encore une ellipse, semblable à la première, mais disposée à angle droit avec elle et décrite en sens inverse.

Le rapport du petit axe au grand, dans ces deux ellipses, est en valeur absolue

$$(22)\qquad q = \frac{2\pi k}{\tau}\cdot\frac{1}{\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2}\sin U\sin U' + \sqrt{\left[\frac{(a-c)\sqrt{L}}{2}\sin U\sin U'\right]^2 + \left(\frac{2\pi k}{\tau}\right)^2}}.$$

Le radical doit être pris avec le signe de $a - c$.

L'angle qui exprime le retard contracté par la deuxième onde, par rapport à la première, en traversant une épaisseur h de la substance, est

$$\frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{h}{\omega_2} - \frac{h}{\omega_1}\right) = \frac{2\pi(\omega_1 - \omega_2)h}{\tau L}.$$

On aura donc, d'après la relation (21),

$$(23)\qquad \text{retard} = 2\pi h\sqrt{\left(\frac{a-c}{2\tau\sqrt{L}}\sin U\sin U'\right)^2 + \left(\frac{2\pi k}{\tau^2 L}\right)^2}.$$

Le radical doit être pris avec le signe de $a - c$.

En résumé, un cristal dissymétrique peut propager dans chaque direction, outre une onde quasi-longitudinale de même vitesse que s'il était symétrique, deux ondes quasi-transversales, ayant chacune

sa vitesse distincte de propagation. Les vibrations de chaque molécule d'éther, dans ces deux ondes, se font suivant deux ellipses semblables, de forme parfaitement déterminée par la relation (22), disposées à angle droit et décrites en sens contraire l'une de l'autre. De plus, le grand axe de chaque ellipse est dirigé comme le serait la vibration rectiligne correspondante, dans le milieu supposé symétrique.

Le rapport q du petit axe au grand axe [(22)] est le plus grand possible pour $U = 0$, ou bien pour $U' = 0$. Il est alors égal à 1 : l'ellipse est un cercle, et l'on a la double réfraction circulaire, avec les mêmes lois approchées que dans les milieux isotropes dissymétriques Dès que U ou U' augmentent, le rapport q diminue, et il devient minimum pour U et U' égaux à 90 degrés. Si k est assez petit par rapport à $a - c$, les ellipses deviendront presque des lignes droites, et les vitesses ω_1, ω_2 seront à peu près les mêmes que pour un cristal symétrique.

Observons, en terminant ce paragraphe, que le défaut de symétrie d'un cristal est caractérisé dans les expressions de u_1, v_1, w_1, non-seulement par les termes en B, mais encore par d'autres que nous avons négligés, et qui contiendraient des dérivées d'ordre supérieur au premier. D'après la nature presque isotrope et presque symétrique du cristal, tous ces termes, y compris ceux en B, se trouvent, sauf erreur négligeable, les mêmes que dans un milieu isotrope, c'est-à-dire qu'ils ont la même forme pour tous les systèmes d'axes coordonnés de même sens relatif. Leur ensemble constitue, dans u_1, v_1, w_1, des expressions dont aucun terme n'est compatible avec la symétrie, quel que soit le système d'axes adopté. Si l'on choisit en particulier les axes des x', des y' et des z', dont les deux premiers sont parallèles aux ondes, ces termes seront pareils aux termes en B, B', B'',... des formules (10), qui seuls, dans ces expressions isotropes de u_1, v_1, w_1 les plus générales possibles pour des ondes parallèles au plan des xy, sont incompatibles avec la symétrie. Par suite, d'après les formules (10 *bis*), ils ne donneront rien dans la troisième équation du mouvement, mais ils ajouteront, au second membre de la première équation, un terme de la forme $\frac{4\pi^2}{\tau^2} k \frac{dv'}{dz'}$, et, au second membre de

la deuxième, un terme de la forme $-\frac{4\pi^2}{\tau^2}k\frac{du'}{dz'}$, k étant une série ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$. On obtiendra donc tous les résultats de ce paragraphe, à cela près que, dans les diverses relations de (20) à (23), il faudra remplacer k par cette série. On pourra, dans celle-ci, substituer à ω^2 sa valeur approchée L, et k ne sera plus qu'une fonction de τ^2, la même pour toutes les ondes quasi-transversales propagées dans le milieu.

§ VII. — *Application au quartz.*

Nous avons supposé au coefficient k une valeur comparable à $a-c$. Or cela n'a lieu pour aucun des corps biréfringents connus jusqu'à ce jour. Dans le quartz, qui est presque le seul de ces corps où l'on ait trouvé la double-réfraction elliptique, k est compris entre les quantités du second ordre en $a-c$ et celles du troisième. L'influence de ce coefficient ne se fait donc sentir que sur les ondes presque normales à l'axe optique : elle est d'ailleurs soumise aux lois du paragraphe précédent, malgré l'extrême petitesse de k, car les termes que nous avons négligés seraient encore beaucoup plus petits que les termes conservés.

Dans les expériences faites par M. Jamin sur la double réfraction elliptique du quartz, on avait, en désignant par ω_0 la vitesse de la lumière dans le vide, et prenant pour unité le millimètre,

$$\tau\omega_0 = 0,000\,588, \quad \frac{2\pi k}{\tau^2 L} = 0,117, \quad \sqrt{L} = \frac{\omega_0}{1,55}, \quad \frac{a-c}{2\sqrt{L}} = \frac{0,0091}{\omega_0}.$$

De là on tire, d'après (23),

$$\frac{\text{retard}}{2\pi h} = \sqrt{(15,47\sin^2 U)^2 + 0,01369},$$

et, en amenant le second membre de (22) à ne dépendre que de $\frac{2\pi k}{\tau^2 L}$ et de $\frac{a-c}{2\tau\sqrt{L}}\sin U \sin U'$,

$$q = \frac{0,117}{15,47\sin^2 U + \sqrt{(15,47\sin^2 U)^2 + 0,01369}}.$$

Les tableaux suivants montrent que ces formules s'accordent autant qu'on pouvait s'y attendre avec les résultats de l'expérience.

U	RETARD $\frac{}{2\pi h}$		DIFFÉRENCE.	U	q		DIFFÉRENCE.
	Calculé.	Observé.			Calculé.	Observé.	
3°30'	0,130	0,134	0,004	5°57'	0,317	0,332	0,015
5.57	0,203	0,204	0,001	8.16	0,177	0,173	— 0,004
8.08	0,331	0,338	0,007	9.55	0,125	0,128	0,003
9.50	0,466	0,471	0,005	11.21	0,096	0,100	0,004
11.55	0,670	0,667	— 0,003	12.35	0,079	0,077	— 0,002
13.41	0,874	0,862	— 0,012	13.41	0,067	0,068	0,001
15.03	1,050	1,055	0,005	15.32	0,052	0,047	— 0,005
16.31	1,251	1,308	0,057				

§ VIII. — *Conditions à la surface, dites de continuité : réflexion et réfraction.*

Nous nous sommes occupés jusqu'ici des phénomènes lumineux qui sont produits à l'intérieur des corps transparents. Il reste à expliquer ceux qui se passent à la surface de séparation de deux d'entre eux, c'est-à-dire la réflexion et la réfraction. Cauchy a fait voir que, pour obtenir leurs lois, il faut joindre aux équations indéfinies des petits mouvements de l'éther des conditions relatives à la surface, qu'il appelle *conditions de continuité*. Elles consistent à admettre que les déplacements u, v, w des molécules d'éther, et les dérivées premières par rapport à x, y, z de ces déplacements, sont égaux chacun à chacun en tout point de la surface, de part et d'autre de celle-ci.

Ces conditions s'obtiennent naturellement dans notre manière de concevoir l'éther. En effet, cet agent, ayant dans deux corps adjacents la même élasticité et la même densité, forme un milieu unique où les u, v, w ne peuvent varier brusquement d'un point aux points voisins. Donc les déplacements doivent être les mêmes de part et d'autre de la surface de séparation. Supposons, pour fixer les idées, que celle-ci soit le plan des yz. Les valeurs de u, v, w seront égales de part et

d'autre de ce plan, et il en sera, par suite, de même des dérivées partielles de u, v, w par rapport à y et à z. Si actuellement on découpe par la pensée, en un point quelconque de la surface, un cylindre très-plat de matière, ayant ses bases parallèles au plan des yz et situées respectivement dans l'un et dans l'autre corps, les actions exercées sur ces deux bases devront très-sensiblement se faire équilibre. Cela entraîne l'égalité, de part et d'autre du plan des yz, des trois composantes élastiques de l'éther que M. Lamé appelle, sous l'unité de surface, N_1, T_3, T_2, et qui valent respectivement (*Leçons sur l'élasticité*, § 20)

$$(\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx} + \lambda\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right), \quad \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right), \quad \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right).$$

Les dérivées partielles $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ sont déjà égales de part et d'autre de la surface de séparation; donc l'égalité de ces forces montre qu'il en est de même de $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$.

Si l'éther n'avait pas la même élasticité chez deux corps adjacents, il est clair que, λ et μ n'étant pas égaux des deux côtés du plan des yz, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ ne le seraient pas non plus. Donc les conditions de continuité n'auraient pas lieu, et les lois des intensités des ondes réfléchies et réfractées ne seraient pas celles que donne l'expérience. C'est pourquoi nous avons cru devoir admettre la constance d'élasticité de l'éther dans deux milieux adjacents. Quant à la constance de sa densité, elle n'est pas nécessaire à notre théorie; mais elle nous paraît une condition naturelle de la constance d'élasticité, et nous la regardons comme vraisemblable.

Étude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction, dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux;

PAR M. BOUSSINESQ.

Ce Mémoire a pour objet : en premier lieu, d'établir les lois des vibrations rectilignes à très-courte période, produites dans un milieu isotrope, et celles des ondes quasi-transversales qui se propagent, à partir d'un seul centre d'ébranlement, dans l'éther des cristaux biréfringents; en deuxième lieu, d'appliquer ces lois à la démonstration des formules fondamentales de la diffraction.

Je considère d'abord un milieu isotrope, et je fais voir que les vibrations rectilignes y sont longitudinales ou transversales, c'est-à-dire perpendiculaires ou parallèles aux surfaces des ondes. Dans les deux cas, celles-ci ont leurs normales communes, les vibrations se font, pour toutes les molécules situées sur chacune de ces normales, suivant des droites parallèles, et la force vive se transmet intégralement d'une de ces molécules aux suivantes, avec la vitesse même des ondes. Il y a en outre, pour les vibrations longitudinales, cette loi particulière que l'amplitude est constante en tous les points d'une même onde, et, pour les vibrations transversales, celle-ci que, sur une même onde, l'amplitude varie, d'un point à un autre de la même ligne de vibration, en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine. J'appelle *ligne de vibration* toute ligne suivant la tangente de laquelle vibre la molécule située en un quelconque de ses points.

Ces lois restreignent le nombre des familles de surfaces qui peuvent être surfaces d'onde. Soit pour les vibrations longitudinales, soit pour les vibrations transversales, il n'y en a que trois, savoir : des

plans parallèles, des cylindres circulaires concentriques, des sphères concentriques.

Je passe ensuite aux milieux biréfringents. Les trois équations de leurs petits mouvements s'obtiennent en multipliant respectivement par trois coefficients presque égaux à l'unité les seconds membres des équations de mouvement d'un milieu isotrope. J'étudie les vibrations quasi-transversales correspondantes à des ondes propagées à partir de l'origine des coordonnées. Ces ondes sont celles de Fresnel, et les vibrations sont dirigées sensiblement, en chacun de leurs points, suivant la projection, sur le plan tangent à l'onde en ce point, du rayon qui y aboutit. Les lignes de vibration sont à très-peu près des ellipses sphériques, ayant leurs foyers sur les axes optiques; leurs trajectoires orthogonales sont des courbes sphériques de même nature. L'amplitude est soumise à trois lois; elle varie : 1° suivant un même rayon, en raison inverse de la distance à l'origine; et de plus, sur une même onde : 2° suivant une même ligne de vibration, en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine; 3° suivant une trajectoire orthogonale aux lignes de vibration, en raison inverse de la distance de cette trajectoire à la trajectoire voisine. En appelant r le rayon mené de l'origine à un point quelconque, U, U' les angles qu'il fait avec les deux axes optiques, ces trois lois reviennent à dire que le carré de l'amplitude est égal à une constante divisée par le produit $r^2 \sin U \sin U'$. C'est la formule qu'obtient M. Lamé, dans ses *Leçons sur l'élasticité*, § 126, par une tout autre voie et pour des milieux biréfringents d'une autre espèce.

Le Mémoire se termine par l'application de ces résultats à la théorie de la diffraction. Je trouve que la formule d'intensité donnée par Fresnel est sensiblement exacte lorsqu'il s'agit de vibrations transversales, comme dans le cas des ondes lumineuses, tandis qu'elle ne le serait pas pour des vibrations longitudinales. Quant à l'expression généralement admise pour la phase, elle devrait être diminuée de $\frac{\pi}{2}$.

§ I. — *Vibrations rectilignes dans les milieux isotropes : loi des normales communes.*

Soient, dans un milieu isotrope : x, y, z les coordonnées rectangulaires d'équilibre d'une molécule M ; u, v, w les déplacements suivant les axes de cette molécule à l'époque t. En désignant par θ la dilatation $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$ et par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$, on sait que les trois équations du mouvement sont de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= \lambda\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta_2 u,\\ \frac{d^2v}{dt^2} &= \lambda\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta_2 v,\\ \frac{d^2w}{dt^2} &= \lambda\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta_2 w.\end{aligned}\right.$$

Supposons que les molécules exécutent des vibrations rectilignes d'une période τ très-courte et d'une direction, variable d'un point à l'autre, définie par les cosinus m', n', p' de ses angles avec les axes. Si A et B désignent deux fonctions continues de x, y, z, les déplacements seront

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u &= A m' \cos\frac{2\pi}{\tau}(t-B),\\ v &= A n' \cos\frac{2\pi}{\tau}(t-B),\\ w &= A p' \cos\frac{2\pi}{\tau}(t-B);\end{aligned}\right.$$

A est l'amplitude, B = const. est l'équation des ondes. Si l'on mène à celles-ci, en chaque point (x, y, z), une normale, les cosinus m, n, p des angles que fera sa direction avec les trois axes seront égaux à $\frac{1}{\Delta_1 B}\frac{dB}{dx}$, $\frac{1}{\Delta_1 B}\frac{dB}{dy}$, $\frac{1}{\Delta_1 B}\frac{dB}{dz}$, $\Delta_1 B$ désignant le paramètre différentiel du premier ordre de B, c'est-à-dire l'expression $+\sqrt{\frac{dB^2}{dx^2}+\frac{dB^2}{dy^2}+\frac{dB^2}{dz^2}}$.

On peut concevoir des lignes perpendiculaires à toutes les ondes, qui

aient pour éléments des portions infiniment petites de ces normales. Celles d'entre ces lignes qui passent par (x, y, z) et par les points infiniment voisins forment ensemble un filet d'étendue que nous appellerons *rayon*, et dont nous désignerons par σ la section normale en (x, y, z) et par $d\varepsilon$ un élément de la longueur. Les ondes emploient pour parcourir le chemin $d\varepsilon$ un temps égal à l'accroissement $\frac{dB}{d\varepsilon}d\varepsilon$ que reçoit B le long de cet élément : leur vitesse ω en (x, y, z) est donc 1 divisé par $\frac{dB}{d\varepsilon}$, et son inverse est

$$\frac{dB}{d\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \frac{dB}{dx}m + \frac{dB}{dy}n + \frac{dB}{dz}p = \Delta_1 B$$

Les valeurs (2) de u, v, w doivent vérifier les équations (1). Désignons par $\mathbf{S}$ la somme de trois termes analogues, dont le premier est écrit après ce signe, par exemple $\frac{dm}{dx} + \frac{dn}{dy} + \frac{dp}{dz}$ pour $\mathbf{S}\frac{dm}{dx}$; désignons de plus par $\frac{d}{d\varepsilon} = \mathbf{S}m\frac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction le long de la ligne $d\varepsilon$. Si nous observons que

$$\frac{dB}{dx} = \frac{m}{\omega}, \quad \frac{dB}{dy} = \frac{n}{\omega}, \quad \frac{dB}{dz} = \frac{p}{\omega},$$

nous trouverons aisément

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dx} = &-\frac{4\pi^2}{\tau^2\omega^2}\left[Am\,\mathbf{S}mm' - \frac{\tau^2\omega^2}{4\pi^2}\frac{d\mathbf{S}\frac{d.Am'}{dx}}{dx}\right]\cos\frac{2\pi}{\tau}(t-B)\\ &+\frac{2\pi}{\tau\omega}\left[m\mathbf{S}\frac{d.Am'}{dx} + \omega\frac{d\frac{A\mathbf{S}mm'}{\omega}}{dx}\right]\sin\frac{2\pi}{\tau}(t-B),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 u = &-\frac{4\pi^2}{\tau^2\omega^2}\left[Am' - \frac{\tau^2\omega^2}{4\pi^2}\Delta_2(Am')\right]\cos\frac{2\pi}{\tau}(t-B)\\ &+\frac{2\pi}{\tau\omega}\left[2A\frac{dm'}{d\varepsilon} + m'\left(2\frac{dA}{d\varepsilon} + A\mathbf{S}\frac{dm}{dx} - \frac{A}{\omega}\frac{d\omega}{d\varepsilon}\right)\right]\sin\frac{2\pi}{\tau}(t-B).\end{aligned}$$

Ces valeurs, portées dans la première équation (1), devront la véri-

fier à toute époque, et donneront les deux relations

$$(3)\quad A\left[(\mu-\omega^2)m'+\lambda m\mathbf{S}mm'\right]-\frac{\tau^2\omega^2}{4\pi^2}\left[\lambda\frac{d\mathbf{S}\dfrac{d.Am'}{dx}}{dx}+\mu\Delta_2(Am')\right]=0,$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\lambda\left[m\mathbf{S}\frac{d.Am'}{dx}+\omega\frac{d\dfrac{A\mathbf{S}mm'}{\omega}}{dx}\right]\\&\quad+\mu\left[2A\frac{dm'}{dz}+m'\left(2\frac{dA}{dz}+A\mathbf{S}\frac{dm}{dx}-\frac{A}{\omega}\frac{d\omega}{dz}\right)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Les deux autres équations du mouvement donneront deux relations pareilles à (3) et deux pareilles à (4).

La longueur d'onde $\tau\omega$ étant excessivement petite, le second terme de l'équation (3), en $\tau^2\omega^2$, est entièrement négligeable à côté du premier, excepté aux endroits où A, m', n', p' varieraient très-rapidement d'un point aux points voisins. Mais, en de tels endroits, on ne doit pas compter sur les équations (1), qui ne peuvent être établies qu'en admettant la continuité de u, v, w. Ce cas excepté, la relation (3) et ses deux pareilles ne sont autres que celles des ondes planes. En les ajoutant, après les avoir respectivement multipliées par m, n, p, on reconnaît aisément qu'elles donnent

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\text{soit des vibrations longitudinales, avec}\\&\qquad m'=m,\quad n'=n,\quad p'=p,\quad \omega^2=\lambda+\mu;\\&\text{soit des vibrations transversales, avec}\\&\qquad \mathbf{S}mm'=0,\quad \omega^2=\mu.\end{aligned}\right.$$

Dans les deux cas, la vitesse de propagation ω est constante, et son inverse $\Delta_1 B$ l'est également. Cela revient à dire que les ondes ont leurs normales communes, et que, l'une d'elles étant donnée, toute autre est le lieu géométrique des extrémités des normales d'égale longueur menées à celle-là. En effet, si nous différentions par rapport à x la relation $\Delta_1 B=$ const., il viendra

$$(6)\quad \frac{1}{\Delta_1 B}\left(\frac{dB}{dx}\frac{d^2B}{dx^2}+\frac{dB}{dy}\frac{d^2B}{dx\,dy}+\frac{dB}{dz}\frac{d^2B}{dx\,dz}\right)=0\quad\text{ou bien}\quad \frac{d\dfrac{dB}{dx}}{dz}=0.$$

Donc les dérivées partielles de B par rapport à x, y, z et par conséquent les cosinus m, n, p ne changent pas le long d'un chemin normal aux ondes. Ce chemin est une ligne droite, et toutes les ondes ont les mêmes normales. Il résulte d'ailleurs évidemment de la relation $\frac{dB}{d\varepsilon} =$ const., que la distance $d\varepsilon$ de deux ondes infiniment voisines est constante, et que par suite l'une quelconque d'entre elles est le lieu géométrique des extrémités des normales d'égale longueur menées à une autre.

§ II. — *Transmission des forces vives.*

Occupons-nous actuellement de l'équation (4), et d'abord transformons-y l'expression $\mathbf{S}\frac{dm}{dx}$. Si m, n, p désignent généralement, en chaque point (x, y, z) de l'espace, les cosinus des angles que fait avec les axes une droite fixe menée à partir de ce point, cette expression $\frac{dm}{dx} + \frac{dn}{dy} + \frac{dp}{dz}$ aura la même valeur dans tous les systèmes possibles d'axes rectangulaires. Soit en effet un autre système quelconque d'axes rectangulaires des x_1, des y_1 et des z_1, faisant respectivement, avec ceux des x, y, z, des angles ayant leurs cosinus égaux à : a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''.

Désignons par m_1, n_1, p_1 les cosinus des angles que fait avec ces axes la direction (m, n, p). Nous aurons les formules de transformation

$$\frac{d}{dx_1} = \mathbf{S}a\frac{d}{dx},\quad \frac{d}{dy_1} = \mathbf{S}a'\frac{d}{dx},\quad \frac{d}{dz_1} = \mathbf{S}a''\frac{d}{dx};$$

$$m_1 = \mathbf{S}am,\qquad n_1 = \mathbf{S}a'm,\qquad p_1 = \mathbf{S}a''m;$$

d'où

$$\frac{dm_1}{dx_1} = \mathbf{S}a\frac{d}{dx}\mathbf{S}am = \mathbf{S}a^2\frac{dm}{dx} + \mathbf{S}bc\left(\frac{dn}{dz} + \frac{dp}{dy}\right),$$

$$\mathbf{S}\frac{dm_1}{dx_1} = \mathbf{S}(a^2 + a'^2 + a''^2)\frac{dm}{dx} + \mathbf{S}(bc + b'c' + b''c'')\left(\frac{dn}{dz} + \frac{dp}{dy}\right),$$

relation qui, d'après des formules bien connues, se réduit à

$$\mathbf{S}\frac{dm_1}{dx_1} = \mathbf{S}\frac{dm}{dx}. \tag{7}$$

Nous pouvons donc admettre qu'on ait adopté pour axe des z la normale à l'onde au point M, et pour axes des x et des y les tangentes aux deux lignes de courbure de l'onde qui passent par ce point. Alors m, n seront nuls en M et très-petits aux points voisins, tandis que p en ces points ne différera de l'unité que d'une quantité du second ordre. On aura donc

$$\frac{dp}{dz} = 0,$$

et si l'on désigne par R, R' les rayons principaux de courbure de l'onde, on trouvera aisément

$$\frac{dm}{dx} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{dn}{dy} = -\frac{1}{R'}.$$

Par conséquent

(8) $$\mathbf{S}\frac{dm}{dx} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Représentons-nous un filet d'étendue normal aux ondes, limité latéralement, sur l'onde qui passe en M, par un rectangle ayant pour deux de ses côtés deux éléments α, α' des lignes de courbure menées à partir de ce point et pour surface $\alpha\alpha' = \sigma$. Ce filet sera coupé par l'onde suivante, distante de la première de $d\varepsilon$, suivant un parallélogramme presque rectangulaire dont deux côtés vaudront $\alpha + d\alpha$, $\alpha' + d\alpha'$, et dont la surface, sauf erreur du quatrième ordre, sera

$$(\alpha + d\alpha)(\alpha' + d\alpha') = \alpha\alpha' + d(\alpha\alpha') = \sigma + d\sigma.$$

D'ailleurs des triangles semblables donnent les proportions

$$\frac{\alpha + d\alpha}{\alpha} = \frac{R - d\varepsilon}{R}, \quad \frac{\alpha' + d\alpha'}{\alpha'} = \frac{R' - d\varepsilon}{R'},$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{-d\varepsilon}{R}, \quad \frac{d\alpha'}{\alpha'} = \frac{-d\varepsilon}{R'}.$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières égalités, on trouve

(9) $$-\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}\frac{dm}{dx} = \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$

Il en résulte

$$2\frac{dA}{d\varepsilon}+A\mathbf{S}\frac{dm}{dx}-\frac{A}{\omega}\frac{d\omega}{d\varepsilon}=\frac{\omega}{A\sigma}\frac{d\frac{A^2\sigma}{\omega}}{d\varepsilon},$$

et l'équation (4) devient

$$(10)\quad \lambda\left(m\mathbf{S}\frac{d.Am'}{dx}+\omega\frac{d\frac{A\mathbf{S}mm'}{\omega}}{dx}\right)+2\mu A\frac{dm'}{d\varepsilon}+\frac{\mu m'\omega}{A\sigma}\frac{d\frac{A^2\sigma}{\omega}}{d\varepsilon}=0.$$

Ajoutons cette relation et ses deux pareilles, après les avoir respectivement multipliées par m', n', p', et observons que de $\mathbf{S}m'^2=1$, il résulte $\mathbf{S}m'\frac{dm'}{d\varepsilon}=0$. Si nous désignons par $d\varepsilon'$ un chemin infiniment petit, pris à partir de M dans le sens de la vibration, et par $\frac{d}{d\varepsilon'}=\mathbf{S}m'\frac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction suivant cette direction, le résultat sera

$$\lambda\left(\mathbf{S}mm'\mathbf{S}\frac{d.Am'}{dx}+\omega\frac{d\frac{A\mathbf{S}mm'}{\omega}}{d\varepsilon'}\right)+\frac{\mu\omega}{A\sigma}\frac{d\frac{A^2\sigma}{\omega}}{d\varepsilon}=0.$$

Dans le cas des vibrations transversales, ou de $\mathbf{S}mm'=0$, cette équation se réduit à

$$(11)\qquad \frac{d\frac{A^2\sigma}{\omega}}{d\varepsilon}=0.$$

Dans celui des vibrations longitudinales, ou de $m'=m$, $n'=n$, $p'=p$, le terme en λ deviendra, grâce à (9), $\frac{\lambda\omega}{A\sigma}\frac{d\frac{A^2\sigma}{\omega}}{d\varepsilon}$, et l'on aura la même équation (11).

Pour trouver le sens de cette équation, considérons le rayon ou petit filet normal aux ondes, dont la section variable est σ. Décomposons-le, par des ondes infiniment voisines, en tranches de hauteur constante $d\varepsilon$. L'une d'elles sera égale à $\sigma d\varepsilon$, et sa force vive à l'époque t, multipliée par le temps très-petit $\frac{d\varepsilon}{\omega}$ durant lequel il la

44..

garde, sera le produit de sa densité par $\frac{4\pi^2}{\tau^2}\frac{A^2\sigma}{\omega}d\varepsilon^2 \sin^2\frac{2\pi}{\tau}(t-B)$. Au bout du temps $\frac{d\varepsilon}{\omega}$, le produit pareil dans le volume suivant sera la même quantité; car, d'après (11), le coefficient du sinus carré ne changera pas, et le sinus ne changera pas lui-même, puisque t aura augmenté de $\frac{d\varepsilon}{\omega}$ et B de $\frac{dB}{d\varepsilon}d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{\omega}$.

Ainsi le produit de la force vive que possède une tranche élémentaire du rayon à un instant quelconque, par le temps infiniment petit durant lequel cette tranche la garde, se transmet à la tranche suivante avec la vitesse même des ondes.

Sauf en quelques points spéciaux, la vitesse ω est constante; ce principe revient donc à dire que le carré de l'amplitude varie suivant un même rayon en raison inverse de la section normale du rayon.

Aux points où les rayons se rencontrent, c'est-à-dire sur la surface, lieu des centres principaux de courbure communs aux ondes, la force vive est incomparablement plus grande qu'ailleurs; cette surface est une caustique.

§ III. — *Ondes longitudinales.*

Nous allons maintenant étudier séparément les vibrations longitudinales et les vibrations transversales, en supposant ω constante, et par suite [(6)] les dérivées $\frac{dm}{d\varepsilon}, \frac{dn}{d\varepsilon}, \frac{dp}{d\varepsilon}$ égales à zéro.

Si l'onde est longitudinale, c'est-à-dire si $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$, l'équation (10) se réduit à

$$\frac{dA}{dx} + m\left(\frac{dA}{d\varepsilon} + \frac{A}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) = 0, \quad \text{ou, d'après (11)}, \quad \frac{dA}{dx} = m\frac{dA}{d\varepsilon}.$$

On trouvera de même

$$\frac{dA}{dy} = n\frac{dA}{d\varepsilon}, \quad \frac{dA}{dz} = p\frac{dA}{d\varepsilon}.$$

Ces trois équations expriment que l'amplitude est constante sur toute l'étendue d'une même onde; telle est la loi particulière aux ondes longitudinales.

L'équation (11) achève de déterminer l'amplitude, puisqu'elle indique comment varie A d'une onde à la suivante. Il en résulte que la quantité $-\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{ds}$ ou $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ devra être la même sur toute une même onde; et que, par conséquent, les ondes longitudinales sont des surfaces dont la courbure moyenne $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ est constante. On peut déduire de là cette conséquence remarquable, que les seules familles de surfaces qui puissent être ondes longitudinales sont, ou des plans parallèles, ou des cylindres circulaires concentriques, ou des sphères concentriques.

En effet, considérons les normales communes aux ondes proposées. Leurs points d'intersection, c'est-à-dire les centres de courbure principaux, sont tous à l'infini, ou bien quelques uns à une distance finie. Dans le premier cas, les ondes sont des plans parallèles. Dans le second cas, menons l'onde qui passe par le point d'intersection de deux normales; sa courbure moyenne en ce point, et, par suite, en tous ses points, sera infinie. Donc cette onde centrale se réduit à une ligne ou à un point, où viennent aboutir toutes les normales. Si c'est une ligne, considérons un de ses éléments infiniment petits. Des points de cet élément partent dans tous les sens des normales, communes à cet élément et aux autres ondes. De plus ces normales, limitées à une même onde, ont toutes la même longueur. Par conséquent toute onde est formée d'une suite de tranches qui sont des fragments de cylindres circulaires de rayon constant, ayant pour axes les divers éléments de l'onde centrale. Une des courbures principales d'une telle surface est celle du cercle qui l'engendre, et l'autre courbure est nécessairement variable aux divers points d'un même cercle générateur, à moins que le lieu des centres de ces cercles ne soit une ligne droite. Les ondes sont donc des cylindres circulaires concentriques. Enfin, si l'onde centrale se réduit à un point, les autres seront des sphères concentriques.

Donc il n'y a pas d'autres ondes longitudinales possibles que celles constituées par des plans parallèles, par des cylindres circulaires concentriques, ou par des sphères concentriques. Elles se produisent respectivement quand on ébranle le milieu de la même manière, sur toute l'étendue d'un plan indéfini, tout autour d'une droite, tout autour d'un point.

§ IV. — *Ondes transversales.*

Si l'onde est transversale, ou que $\mathbf{S}mm' = 0$, l'équation (10) devient

$$\lambda m \mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx} + 2\mu\mathrm{A}\frac{dm'}{d\varepsilon} = 0,$$

qui, jointe à ses deux pareilles, donne

$$\frac{1}{m}\frac{dm'}{d\varepsilon} = \frac{1}{n}\frac{dn'}{d\varepsilon} = \frac{1}{p}\frac{dp'}{d\varepsilon}.$$

Intégrons le long d'un même rayon, et observons que m, n, p restent invariables dans cette intégration. En désignant par m'_0, n'_0, p'_0 les valeurs initiales de m', n'. p', il viendra

$$\frac{m' - m'_0}{m} = \frac{n' - n'_0}{n} = \frac{p' - p'_0}{p}.$$

Multiplions respectivement les deux termes de ces rapports par m, n, p, et ajoutons-les terme à terme, en observant que $\mathbf{S}mm' = 0$. $\mathbf{S}mm'_0 = 0$. Nous verrons que la valeur de ces rapports est nulle, et que par suite

$$\frac{dm'}{d\varepsilon} = \frac{dn'}{d\varepsilon} = \frac{dp'}{d\varepsilon} = 0. \tag{12}$$

Ainsi le long d'un même rayon, les vibrations se font suivant des droites parallèles. La même loi s'applique évidemment aux ondes longitudinales, puisque les vibrations y ont lieu suivant le rayon même.

L'équation (10) et ses deux analogues se réduisent actuellement à

$$\mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{S}m'\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \mathrm{A}\mathbf{S}\frac{dm'}{dx} = 0. \tag{13}$$

Cette relation, jointe à $\mathbf{S}mm' = 0$, exprime que θ est nul, ou que le mouvement se fait sans changement de densité.

Appelons $d\varepsilon'$ un élément de chemin, mené, à partir du point considéré M, dans la direction (m', n', p') de la vibration, et (13) pourra

s'écrire

$$(14)\qquad \frac{dA}{dz'} + AS\frac{dm'}{dx} = 0.$$

Nous avons démontré [(7)] que l'expression $S\frac{dm'}{dx}$ a la même valeur en chaque point, quel que soit le système d'axes rectangulaires adopté. Nous pouvons donc supposer que l'axe des y soit mené, à partir du point M, dans la direction (m, n, p) du rayon, et celui des z suivant la vibration. Nous aurons, en M, $m' = 0$, $n' = 0$, $p' = 1$. Nous pouvons d'ailleurs admettre qu'on ait tracé sur l'onde les lignes de vibration, c'est-à-dire les lignes telles, que toutes les molécules situées sur elles vibrent suivant leurs tangentes. Ces lignes découpent l'onde en bandes infiniment étroites. L'élément linéaire de direction (m', n', p'), mené à partir de M, est tangent à l'une de ces courbes, et la perpendiculaire qui le sépare en M de la ligne de vibration voisine, est parallèle à l'axe des x; nous la désignerons par φ. La quantité $-\frac{dm'}{dx}$ est sensiblement, au point M, le rapport à φ de l'angle que fait la ligne de vibration menée en M avec la projection, sur le plan de cette ligne et de l'élément φ, de la ligne de vibration voisine; cette quantité est, sauf erreur négligeable, égale à $-\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dz'}$. La dérivée $\frac{dn'}{dy}$ est nulle d'après les équations (12); $\frac{dp'}{dz}$ l'est encore, car p' ne varie aux environs de M que de quantités du second ordre. Ainsi la relation (14) devient

$$(15)\qquad \frac{dA}{dz'} + \frac{A}{\varphi}\frac{d\varphi}{dz'} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d.A\varphi}{dz} = 0.$$

Elle exprime que le produit $A\varphi$ est constant le long d'une bande comprise entre deux lignes infiniment voisines de vibration; mais il peut varier arbitrairement d'une bande à l'autre.

La loi particulière aux ondes transversales est donc que l'amplitude varie, suivant une ligne de vibration, en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine, située sur la même onde.

Cette loi, combinée avec les lois générales (11) et (12), restreint le nombre des familles de surfaces qui peuvent être surfaces d'ondes trans-

versales. Cherchons par exemple quelles surfaces d'ondes sont possibles avec des vibrations dirigées à volonté suivant l'un ou l'autre de leurs systèmes de lignes de courbure. Les surfaces développables formées par les normales aux ondes diviseront celles-ci en une infinité de petits rectangles, dont j'appellerai ε' la dimension parallèle à la vibration, et dont φ désigne déjà l'autre dimension. Leur surface sera $\varphi\varepsilon'$. D'après (11), le produit $A^2\varphi\varepsilon'$ ou $(A\varphi)^2\frac{\varepsilon'}{\varphi}$ sera constant le long d'une même normale, et par conséquent se trouvera le même en deux points correspondants de deux ondes. D'ailleurs $A\varphi$ est constant suivant une même ligne de vibration. Donc, en tous les points correspondants de deux ondes, situés sur une même surface développable formée par les normales, la fraction $\frac{\varepsilon'}{\varphi}$ relative à une des deux ondes est, à la fraction $\frac{\varepsilon'}{\varphi}$ relative à l'autre, dans un rapport constant. Si l'on prend pour la première onde celle qui passe par un point où se réunissent deux génératrices de la surface développable, on aura en ce point $\varepsilon' = 0$, et par suite ε' sera nul sur toute la ligne de vibration qui y passe. Donc cette ligne se réduit à un point, et la surface développable est un cône. Il n'y a d'exception que pour le cas où les génératrices seraient parallèles; alors ce cône deviendrait un cylindre.

Ainsi les normales aux ondes, menées suivant une même ligne de courbure, se rencontrent en un même point, ou sont parallèles. Il peut se faire : 1° ou bien que les normales correspondantes aux deux systemes de lignes de courbure soient paralleles; 2° ou bien qu'elles se rencontrent toutes au même point; 3° ou bien que celles d'un systeme, situées sur une même ligne de courbure, soient parallèles, et que celles de l'autre se rencontrent. Les ondes seront évidemment, dans le premier cas des plans parallèles, et dans le second des sphères concentriques. Dans le troisième, supposons les vibrations dirigées suivant le système des lignes de courbure qui correspondent aux normales paralleles. Alors ε' sera constant sur chaque rayon, et, tout le long d'une même ligne de vibration, en deux points correspondants de deux ondes, φ sur la première sera à φ sur la seconde dans un rapport constant. Si donc on mène la première par un point où se rencon-

trent deux normales appartenant aux lignes de courbure de l'autre système, on aura en ce point, et, par suite, sur toute la ligne de vibration qui y passe, $\varphi = 0$; c'est-à-dire que cette ligne de vibration est le lieu des points d'intersection des normales appartenant aux lignes de courbure du deuxième système. Elle constitue une onde centrale à laquelle viennent aboutir toutes les normales. Les ondes sont par suite composées de tranches ayant la forme de cylindres circulaires de rayon constant, avec les éléments de l'onde centrale pour axes. Comme une de leurs courbures principales est partout nulle, ce sont des cylindres circulaires concentriques.

Il y a donc seulement trois familles d'ondes, pouvant correspondre à des vibrations transversales dirigées suivant leurs lignes de courbure : ce sont des plans parallèles, des cylindres circulaires concentriques et des sphères concentriques, c'est-à-dire les mêmes que pour les vibrations longitudinales. On pourrait même les réduire aux deux dernières, car les plans parallèles n'en sont qu'un cas particulier.

Quand les ondes sont sphériques, les vibrations peuvent être dirigées d'une manière quelconque sur l'une d'elles. Si en particulier les lignes de vibration sont des cercles parallèles, l'amplitude sera constante sur chacune, mais variera arbitrairement d'une ligne à l'autre. On pourra par exemple la supposer nulle partout, excepté sur une bande très-mince. D'une onde à l'autre, et suivant un même rayon, elle décroîtra, d'après (11), en raison inverse de la distance au centre.

Pour établir toutes ces lois, nous avons supposé que u, v, w variaient d'une manière continue d'un point aux points voisins; ce n'est qu'à cette condition que l'on peut poser les équations (1), et négliger dans (3) les termes en $\tau^2\omega^2$. Or cette condition n'est pas satisfaite à une trop petite distance du centre de l'ébranlement, dans les ondes sphériques. Donc les lois obtenues ne sont vraies qu'à partir d'une onde sphérique centrale, dont nous appellerons plus loin ζ le rayon, qui est très-petit et presque insensible.

§ V. — *Ondes quasi-transversales dans les milieux biréfringents.*

Après les équations (1), qui régissent les petits mouvements des milieux isotropes, les plus simples sont celles qu'on obtient en multi-

pliant respectivement les seconds membres de ces équations par trois coefficients $1+a$, $1+b$, $1+c$, peu différents de l'unité :

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = (1+a)\left(\lambda\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\Delta_2 u\right), \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} = (1+b)\left(\lambda\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\Delta_2 v\right), \\ \dfrac{d^2w}{dt^2} = (1+c)\left(\lambda\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\Delta_2 w\right). \end{cases}$$

Ce sont celles que j'ai trouvées dans ma théorie nouvelle des ondes lumineuses [formules (15), avec $k=0$] [*], pour représenter les vibrations de l'éther dans les cristaux transparents. Elles sont un cas très-particulier des équations (8) de mouvement des milieux isotropes déformés, étudiées dans un autre Mémoire [**]; il suffit de faire, dans ces équations (8), pour obtenir nos relations actuelles (16), $\lambda'=\lambda$, $\rho=\mu$, $\sigma=0$, $\nu=0$. Elles expliquent la double réfraction suivant les idées de Fresnel, puisque $\sigma=0$ (*voir* § VIII de ce Mémoire); seulement les vibrations ne sont qu'à peu près transversales.

Je me propose d'étudier, parmi les ondes quasi-transversales qu'elles peuvent représenter, celles qui sont propagées à partir d'un centre unique, pris pour origine des coordonnées. Je me contenterai d'indiquer les résultats du dernier Mémoire cité, qui me seront nécessaires, me réservant d'étudier ici les lois de l'amplitude.

Nous avons vu (§ V du même Mémoire) que, si des ondes à vibrations rectilignes peuvent se propager à partir de l'origine, elles grandissent proportionnellement au temps en restant semblables à elles-mêmes, et sont les enveloppes de toutes les ondes planes parties en même temps qu'elles de l'origine. En posant

$$\mu(1+a)=\alpha,\quad \mu(1+b)=\beta,\quad \mu(1+c)=\gamma,$$

celle qui est partie de l'origine depuis l'unité de temps a pour équation

$$(17)\qquad \mathbf{S}\frac{x^2}{\mathbf{S}x^2-\alpha}=1.$$

---

[*] *Journal de Mathématique pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, p. 330.

[**] *Journal de Mathématique pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, p. 221.

Menons à cette onde, en un point (x, y, z), à l'extrémité du rayon $r = \sqrt{\mathbf{S}x^2}$, l'onde plane tangente.

Les cosinus m, n, p des angles de sa normale avec les axes seront (formules 23), sauf erreur du second ordre,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{x}{r} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{x}{\mathbf{S}x^2 - \alpha} \frac{1}{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}, \\ n &= \frac{y}{r} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{y}{\mathbf{S}x^2 - \beta} \frac{1}{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}, \\ p &= \frac{z}{r} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{z}{\mathbf{S}x^2 - \gamma} \frac{1}{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Au même point (x, y, z), les vibrations se font (formules 24) suivant la direction définie, sauf erreur du premier ordre, par les cosinus

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} m' &= \frac{x}{\mathbf{S}x^2 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}, \\ n' &= \frac{y}{\mathbf{S}x^2 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}, \\ p' &= \frac{z}{\mathbf{S}x^2 - \gamma} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs donnent, comme il est aisé de le vérifier, $\mathbf{S}mm' = 0$, sauf erreur du second ordre, de telle sorte que si elles étaient exactes, les vibrations seraient transversales. Mais la formule (17) du même Mémoire fait voir que l'angle très-petit de la vibration avec l'onde est à très-peu près

$$(20)\quad \mathbf{S}mm' = \frac{\sqrt{\mu}}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}}.$$

Avec les relations (19) et (20), on peut mettre sensiblement (18) sous

la forme

$$(21)\quad \begin{cases} m = \dfrac{x}{r} - \dfrac{\lambda}{\mu}\, m'\,\mathbf{S}\,mm', \\ n = \dfrac{y}{r} - \dfrac{\lambda}{\mu}\, n'\,\mathbf{S}\,mm', \\ p = \dfrac{z}{r} - \dfrac{\lambda}{\mu}\, p'\,\mathbf{S}\,mm'. \end{cases}$$

Enfin, tout le long d'un rayon, c'est-à-dire d'une droite quelconque émanée de l'origine, la direction (m, n, p) et la vitesse ω des ondes planes tangentes sont constantes, ainsi que les cosinus (m', n', p') qui fixent la direction de la vibration. On peut donc regarder les formules (21) comme s'étendant à toutes les ondes et non pas comme s'appliquant seulement à l'onde (17).

Nous désignerons toujours par $\dfrac{d}{d\varepsilon} = \mathbf{S}\,m\,\dfrac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction le long d'une normale menée en (x, y, z) à l'onde qui passe par ce point; par $\dfrac{d}{d\varepsilon'} = \mathbf{S}\,m'\,\dfrac{d}{dx}$ la dérivée d'une fonction suivant la vibration, et encore par $\dfrac{d}{dr} = \mathbf{S}\,\dfrac{x}{r}\,\dfrac{d}{dx}$ la dérivée suivant le rayon, qui est ici distinct de la normale.

Les valeurs de u, v, w étant représentées par les formules (2) du Mémoire actuel, la première équation (16) donnera évidemment les deux équations (3) et (4), dans lesquelles il suffira de remplacer λ et μ par $\lambda(1+a)$, $\mu(1+a)$. L'équation (3) et ses deux analogues, où l'on néglige les termes en $\tau^2\omega^2$, deviendront les trois équations des ondes planes; elles sont vérifiées par le fait même qu'on adopte la surface (17) pour l'onde partie de l'origine depuis l'unité de temps, et les valeurs approchées (19) et (20) pour m', n', p', $\mathbf{S}\,mm'$. L'équation (4) ne change pas, car le facteur $1+a$ est commun à tous ses termes et disparaît : c'est elle, avec ses deux analogues, que devra vérifier l'amplitude A.

Le milieu étant presque isotrope, les dérivées partielles de ω seront très-petites, et on pourra négliger les termes qui les contiendront en même temps que d'autres quantités du premier ordre de petitesse; par exemple ω pourra être supposée constante dans les termes qui auront le facteur $\mathbf{S}\,mm'$.

§ VI. — *Première et deuxième lois de l'amplitude.*

L'équation (4) et ses deux pareilles, respectivement multipliées par m', n', p' et ajoutées, donnent

$$(22)\quad \lambda\left(\mathbf{S}mm'\,\mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx}+\frac{d.\mathrm{A}\,\mathbf{S}mm'}{d\varepsilon'}\right)+\mu\left(2\frac{d\mathrm{A}}{d\varepsilon}+\mathrm{A}\,\mathbf{S}\frac{dm}{dx}-\frac{\mathrm{A}}{\omega}\frac{d\omega}{d\varepsilon}\right)=0.$$

Il résulte des formules (21) que

$$(23)\qquad \frac{d}{d\varepsilon}\quad\text{ou}\quad \mathbf{S}m\frac{d}{dx}=\frac{d}{dr}-\frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{S}mm')\frac{d}{d\varepsilon'},$$

$$\mathbf{S}\frac{dm}{dx}=\frac{2}{r}-\frac{\lambda}{\mu}\left(\mathbf{S}mm'\,\mathbf{S}\frac{dm'}{dx}+\frac{d\mathbf{S}mm'}{d\varepsilon'}\right);$$

et par suite, si l'on observe que $\frac{d\omega}{dr}=0$ et que les termes du second ordre de petitesse sont négligeables,

$$2\frac{d\mathrm{A}}{d\varepsilon}+\mathrm{A}\,\mathbf{S}\frac{dm}{dx}-\frac{\mathrm{A}}{\omega}\frac{d\omega}{d\varepsilon}=2\left(\frac{d\mathrm{A}}{dr}+\frac{\mathrm{A}}{r}\right)-\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{d.\mathrm{A}\,\mathbf{S}mm'}{d\varepsilon'}+\mathbf{S}mm'\,\mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx}\right).$$

La relation (22) devient

$$(24)\qquad \frac{d\mathrm{A}}{dr}+\frac{\mathrm{A}}{r}=0\quad\text{ou}\quad\frac{d.\mathrm{A}r}{dr}=0.$$

D'où la première loi, analogue à celle de la relation (11) : l'amplitude, suivant un même rayon, varie en raison inverse de la distance au centre de l'ébranlement.

Tenons compte des formules précédentes, et rappelons que $\frac{dm'}{dr}=0$; l'équation (4) deviendra

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}&(m-m'\,\mathbf{S}mm')\,\mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx}+\frac{d.\mathrm{A}\,\mathbf{S}mm'}{dx}\\&\quad-m'\frac{d.\mathrm{A}\,\mathbf{S}mm'}{d\varepsilon'}-2\mathrm{A}(\mathbf{S}mm')\frac{dm'}{d\varepsilon'}=0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement cette équation et ses deux pareilles

par m, n, p, puis ajoutons-les et négligeons les termes du second ordre de petitesse. Nous aurons

$$\mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dr}\mathbf{S}mm' - 2\mathrm{A}\mathbf{S}mm'\mathbf{S}m\frac{dm'}{d\varepsilon'} = 0.$$

Or, à cause de $\mathbf{S}mm'$ très-petit, on peut remplacer dans le troisième terme $\mathbf{S}m\frac{dm'}{d\varepsilon'}$ par $-\mathbf{S}m'\frac{dm}{d\varepsilon'}$; d'ailleurs, m, n, p valant sensiblement $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, on trouve au même degré d'approximation

$$\frac{dm}{d\varepsilon'} = \frac{m'}{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}m\frac{dm'}{d\varepsilon'} = -\frac{1}{r}.$$

Tenons compte de (24), et nous aurons simplement

$$\mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx} + \frac{\mathrm{A}}{r}\mathbf{S}mm' = 0, \tag{26}$$

Si l'on observe que le terme en $\mathbf{S}mm'$ est très-petit et que m', n', p' varient très-peu le long de la normale à l'onde, cette équation deviendra sensiblement pareille à (13) et se traitera de la même manière. Elle exprime que l'amplitude, aux divers points d'une même ligne de vibation, varie à peu près en raison inverse de la distance de cette ligne à la ligne de vibration voisine, prise sur la même onde. Les vibrations n'étant que quasi-transversales, leurs lignes ne sont pas rigoureusement sur les ondes; mais il est clair qu'on peut les y supposer, sauf erreur négligeable, en les remplaçant par les projections sur ces surfaces des éléments rectilignes suivant lesquels vibrent les molécules qui y sont situées.

§ VII. — *Troisième loi.*

En éliminant $\mathbf{S}\frac{d.\mathrm{A}m'}{dx}$ par la relation (26), on change (25) en

$$-m\frac{\mathrm{A}}{r}\mathbf{S}mm' + \frac{d.\mathrm{A}\mathbf{S}mm'}{dx} - m'\frac{d.\mathrm{A}\mathbf{S}mm'}{d\varepsilon'} - 2\mathrm{A}(\mathbf{S}mm')\frac{dm'}{d\varepsilon'} = 0. \tag{27}$$

Les relations (24) et (26) étant déjà deux conséquences distinctes

de l'équation (4) et de ses deux analogues, il suffit, pour achever de les interpréter, que nous en tirions une troisième conséquence. Appelons f, g, h les cosinus des angles que fait avec les axes la perpendiculaire menée, en (x, y, z), à la normale (m, n, p) et à la projection de la vibration sur l'onde. Multiplions (27) et ses deux pareilles respectivement par f, g, h et ajoutons les résultats. De plus, appelons $d\varphi$ un élément de chemin pris dans la direction (f, g, h) et $\frac{d}{d\varphi}$ la dérivée d'une fonction suivant cette direction. En négligeant les quantités du second ordre, nous obtiendrons

$$(28) \qquad \frac{d.\mathrm{A}\,\mathbf{S}\,mm'}{d\varphi} - 2\,\mathrm{A}\,\mathbf{S}\,mm'\,\mathbf{S}f\frac{dm'}{d\varepsilon'} = 0.$$

Au second terme qui contient le facteur $\mathbf{S}\,mm'$, (m', n', p') et $d\varepsilon'$ peuvent être censés, dans l'expression $\mathbf{S}f\frac{dm'}{d\varepsilon'}$, représenter la direction et la grandeur d'un élément de la ligne de vibration située sur l'onde. De $\mathbf{S}fm' = 0$ il résultera $\mathbf{S}f\frac{dm'}{d\varepsilon'} = -\,\mathbf{S}\,m'\frac{df}{d\varepsilon'}$. Or df, dg, dh étant les petits accroissements de f, g, h le long de l'élément $d\varepsilon'$, $\mathbf{S}m'df = \mathbf{S}\,m'(f + df)$ représente le cosinus de l'angle fait avec l'élément $d\varepsilon'$ par la trajectoire orthogonale de la ligne de vibration, trajectoire menée à la seconde extrémité de cet élément. Si ε' désigne la portion des lignes de vibration comprise entre deux trajectoires orthogonales infiniment voisines, on voit aisément que le rapport de ce cosinus à $d\varepsilon'$ vaut $\frac{1}{\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{d\varphi}$. Donc l'équation (28) deviendra

$$(29) \qquad \frac{d.\mathrm{A}\,\mathbf{S}\,mm'}{d\varphi} + \frac{2\,\mathrm{A}\,\mathbf{S}\,mm'}{\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{d\varphi} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d(\mathrm{A}\,\varepsilon'^2\,\mathbf{S}\,mm')}{d\varphi} = 0.$$

Rappelons que, d'après les résultats du Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés, ou encore d'après les formules (21), la vibration est sensiblement dirigée suivant la projection du rayon sur le plan tangent à l'onde. Par suite, sur l'onde (17) par exemple, la trajectoire orthogonale aux lignes de vibration, menée en un point (x, y, z), est l'intersection de l'onde par la sphère

$\mathbf{S}x^2 =$ une constante C, qui passe en ce point. Soient δx, δy, δz les projections sur les axes de la ligne ε', dont la direction est donnée par les formules (19), et qui est comprise sur l'onde (17) entre la trajectoire $\mathbf{S}x^2 = \mathrm{C}$ et celle-ci $\mathbf{S}x^2 = \mathrm{C} + \delta\mathrm{C}$. Nous aurons évidemment

$$\delta x = \frac{x}{\mathbf{S}x^2 - \alpha} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}},$$

$$\delta y = \frac{y}{\mathbf{S}x^2 - \beta} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}},$$

$$\delta z = \frac{z}{\mathbf{S}x^2 - \gamma} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\mathbf{S}\dfrac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}},$$

$$2\mathbf{S}x\,\delta x = \delta\mathrm{C},$$

et par suite, en tenant compte de (17),

$$\varepsilon' = \frac{\delta\mathrm{C}}{2}\sqrt{\mathbf{S}\frac{x^2}{(\mathbf{S}x^2 - \alpha)^2}}.$$

D'apres (20), cette valeur de ε' est en raison inverse de $\mathbf{S}mm'$, et (29) peut s'écrire

$$(30) \qquad \frac{d.\mathrm{A}\varepsilon'}{d\varphi} = 0.$$

D'où la troisième loi : *Sur une même trajectoire orthogonale aux lignes de vibration situées sur une onde, l'amplitude varie en raison inverse de la distance de cette trajectoire à la trajectoire voisine.*

Cette loi, par son énoncé, ressemble à la seconde; mais elle en diffère beaucoup par son importance et par sa généralité. En effet, la relation (29), qui la contient, a tous ses termes du premier ordre de petitesse, et si, dans un phénomène naturel, les valeurs de u, v, w n'étaient qu'à peu près représentées par les expressions (2), les deux premières lois seraient encore vérifiées, comme n'exprimant que le gros du phénomène, tandis que la relation (29) aurait de nouveaux

termes du même ordre de grandeur que ceux qui s'y trouvent, et donnerait pour l'amplitude une loi différente de (30).

Pareillement, les lois de l'amplitude, déduites de l'équation (4) et de ses deux analogues, doivent être moins bien vérifiées par les phénomènes que celles concernant la forme des ondes et la direction des vibrations, déduites de (3) et de ses deux pareilles : car, si l'on multiplie les équations du mouvement par $\tau^2 \omega^2$, l'équation (4) sera fournie par l'ensemble des termes de la première qui contiendront alors le facteur très-petit $\tau\omega$, tandis que (3), première équation des ondes planes, sera fournie dans sa partie sensible par l'ensemble des termes qui n'auront pas ce facteur; si donc u, v, w n'ont qu'à peu près la forme (2), les termes négligés influeront plutôt sur (4) que sur (3).

§ VIII. — *Expression de l'amplitude.*

Il nous reste à déduire des deux dernières lois (26) et (30) l'expression de l'amplitude sur une onde particulière, par exemple sur l'onde (17), afin de montrer que ces deux lois ne sont pas contradictoires; ensuite la première loi (24) achèvera de déterminer l'amplitude en un point quelconque. Pour cela, il nous faut d'abord étudier rapidement les lignes de vibration et leurs trajectoires orthogonales.

Rappelons, du Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés (§ IV), que, si l'on coupe l'ellipsoïde d'élasticité $S\alpha x^2 = 1$ par un plan passant à l'origine, qu'on mène d'un même côté deux plans parallèles au premier et tangents à l'onde, et enfin les rayons qui aboutissent à leurs points de contact, les vibrations correspondantes au plus grand de ces rayons se font suivant le petit axe, égal à son inverse, de l'intersection du premier plan par l'ellipsoïde, et les vibrations correspondantes au plus petit de ces rayons se font suivant le grand axe, égal encore à son inverse, de la même ellipse d'intersection. Comme ces rayons sont très-voisins de la normale au plan, on peut leur substituer les rayons correspondants à cette normale.

Cela posé, si nous admettons qu'on ait choisi les axes de manière qu'on ait $\alpha > \beta > \gamma$, l'ellipsoïde aura deux sections circulaires passant par l'axe des y et également inclinées sur l'axe des x. Les normales à ces sections rencontreront donc à très-peu près aux mêmes

points les deux nappes de l'onde, c'est-à-dire qu'elles seront très-voisines des axes optiques où se réunissent les deux nappes. D'ailleurs les deux cercles seront égaux.

Considérons donc un rayon quelconque, les deux axes optiques, et trois plans menés par l'origine respectivement perpendiculaires à ce rayon et aux axes. Le premier de ces plans coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse et les deux autres suivant les deux sections circulaires égales. Ces deux derniers cercles intersectent donc l'ellipse du premier plan suivant deux diamètres égaux : par suite leurs intersections ont pour bissectrices les deux axes de l'ellipse. Or si l'on mène un plan par le rayon considéré et par chacun des axes optiques, ces plans couperont le plan de l'ellipse suivant deux lignes perpendiculaires à ces intersections et dont les angles auront les mêmes bissectrices. Par suite, les axes de l'ellipse seront contenus dans les plans bissecteurs des angles des deux plans qui passent par le rayon et par chacun des axes optiques. Les axes de l'ellipse donnant la direction des vibrations, il en résulte le théorème suivant, qui se trouve d'ailleurs dans les traités de double réfraction :

Si l'on fait passer un plan par un rayon et par chacun des axes optiques, les vibrations des molécules situées sur ce rayon se font suivant les plans bissecteurs des angles de ces deux plans.

Actuellement, U et U' désignant les deux angles que fait avec les axes optiques le rayon mené en un point quelconque d'une onde, je dis que les lignes de vibration sont à peu près des ellipses sphériques ayant leurs foyers sur les axes optiques, c'est-à-dire que, sur l'onde qui est presque une sphère, elles ont pour équation

$$\mathrm{U} \mp \mathrm{U}' = \text{const.}$$

Soient : A, A' (*fig.* 1) les intersections des deux axes optiques par l'onde considérée; MA, MA' deux lignes géodésiques ou très-sensiblement deux arcs de grand cercle qui joignent à ces points tout point M de l'onde; MN un élément de la ligne de vibration qui passe par ce point. Cet élément, d'après la loi ci-dessus, fait des angles égaux avec AM et avec A'M ou avec le prolongement de AM et avec MA'. Menons par

la pensée deux arcs de grand cercle NA et NA′. Je dis que, dans le premier cas,

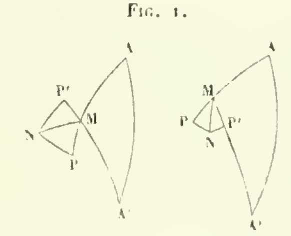
$$NA - NA' = MA - MA',$$

et que, dans le second,

$$NA + NA' = MA + MA'.$$

Des points A et A′, comme pôles, menons deux arcs infiniment petits NP, NP′, qui déterminent, suivant AM, A′M, deux arcs de grand cercle AP, A′P′ respectivement égaux à AN, A′N. Les deux triangles

Fig. 1.



NPM, NP′M, rectangles en P, P′, auront hypoténuse commune et l'angle aigu en M égal : par suite MP = MP′. Or MP est ce que gagne AM en devenant AN, et MP′ est, dans le premier cas, ce que gagne et, dans le second, ce que perd l'autre distance A′M en devenant A′N. Donc la différence ou la somme de ces deux distances reste constante quand le point M se déplace suivant une ligne de vibration.

Si le point M est en particulier sur l'axe des x, la considération de l'ellipsoïde d'élasticité montre que la vibration qui fait deux angles égaux avec MA et MA′ correspond au plus grand rayon, c'est-à-dire à la nappe extérieure. Par la raison de continuité, il en sera de même si le point M se déplace d'une manière quelconque, à partir de l'axe des x, mais en restant sur la même nappe. Donc les lignes de vibration ont pour équation

$$U \mp U' = \text{une const. } C_1,$$

le signe — correspondant à la nappe extérieure, le signe + à la nappe intérieure.

Les trajectoires orthogonales aux lignes de vibration seront évidemment

$$U \pm U' = \text{une const. } C_2.$$

Évaluons l'élément $MN = ds$, en fonction de U et de dU. Pour cela, reportons-nous aux figures précédentes et appelons I, dans le premier cas, l'angle des deux arcs MA, MA', et, dans le second, son supplément. Le triangle sphérique AMA' donnera, en désignant par $2\theta'$ l'angle des deux axes optiques,

$$\cos 2\theta' = \cos U \cos U' \pm \sin U \sin U' \cos I,$$

d'où

$$\cos\frac{I}{2} = \sqrt{\frac{\cos 2\theta' - \cos(U \pm U')}{\pm 2 \sin U \sin U'}}.$$

Or, dans le triangle MPN, où $MP = r\,dU$, on a

$$MN \quad \text{ou} \quad ds = \frac{r\,dU}{\cos\frac{I}{2}} = r\,dU \sqrt{\frac{\pm 2 \sin U \sin U'}{\cos 2\theta' - \cos(U \pm U')}}.$$

Observons que l'on doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que l'équation de l'arc ds est

$$dU - dU' = 0 \quad \text{ou} \quad dU + dU' = 0.$$

Nous pouvons enfin calculer les distances infiniment petites φ ou ε' de deux lignes de vibration ou de deux trajectoires orthogonales à ces lignes. Il suffira de faire dans l'expression de ds : pour obtenir φ,

$$dU \pm dU' = 0, \quad dU \mp dU' = dC_1, \quad U \mp U' = C_1;$$

pour obtenir ε',

$$dU \mp dU' = 0, \quad dU \pm dU' = dC_2, \quad U \pm U' = C_2.$$

Nous trouverons ainsi

$$(31) \qquad \varphi = \frac{dC_1}{2}\, r \sqrt{\frac{\mp 2 \sin U \sin U'}{\cos 2\theta' - \cos C_1}}, \quad \varepsilon' = \frac{dC_2}{2}\, r \sqrt{\frac{\pm 2 \sin U \sin U'}{\cos 2\theta' - \cos C_2}}.$$

D'après la deuxième loi de l'amplitude, C_1 et dC_1 ne variant pas, le produit $A\varphi$ est constant, et, d'après la troisième, C_2 et dC_2 ne variant pas, $A\varepsilon'$ l'est également. Il est évident qu'on ne peut satisfaire à ces deux conditions qu'en prenant sur toute une onde

$$A = \frac{\text{constante}}{r\sqrt{\sin U \sin U'}}. \tag{32}$$

Cette valeur de A vérifiera aussi la première loi (24), si la constante est la même pour toutes les ondes : elle est donc l'expression générale de l'amplitude.

§ IX. — *Application à la diffraction et à la délimitation des rayons lumineux.*

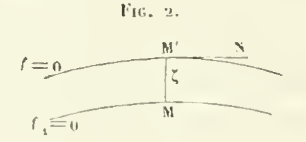
Généralement les ondes lumineuses qui se propagent dans un espace ne sont pas indéfinies; souvent au contraire elles sont très-restreintes dans le sens latéral, comme cela arrive pour un pinceau de lumière qui pénètre dans une chambre par une étroite ouverture. On sait comment, dans ce cas, la Physique actuelle explique la propagation du mouvement dans un sens à l'exclusion des autres. Elle suppose qu'on peut concevoir tous les points de la première onde considérée comme autant de centres d'ébranlement, propageant autour d'eux des vibrations d'une amplitude proportionnelle à celle de l'onde elle-même en ces points, et que la superposition de toutes ces vibrations fournit pour chaque molécule du milieu les vrais déplacements. On y joint toutefois cette hypothèse que les vibrations propagées autour de chaque point de l'onde primitive n'ont une amplitude appréciable qu'aux environs de la normale à cette onde. Les expressions que l'on déduit de là pour l'amplitude expliquent et permettent d'évaluer avec une précision suffisante les phénomènes concernant la diffraction et la délimitation des rayons lumineux. Toutefois les deux hypothèses admises peuvent laisser des doutes, la seconde surtout, car nous avons vu que, dans les vibrations transversales, l'amplitude ne varie pas d'une manière arbitraire aux divers points d'une même onde, mais en raison inverse de la distance de chaque ligne de vibration à la ligne de vibration voisine. Il y a donc

lieu d'examiner si l'analyse permet d'obtenir les formules dont on se sert en diffraction.

Supposons d'abord notre milieu homogène et isotrope, et de plus, afin de fixer les idées, limité inférieurement par une surface quelconque $f(x, y, z) = 0$, mais indéfini latéralement et en haut. Les molécules de la surface exécutent simultanément des vibrations transversales rectilignes, ayant une amplitude et une direction données, arbitrairement variables suivant une loi continue d'un point à l'autre, mais constantes en chaque point pendant un temps assez long. Bientôt toutes les molécules du milieu exécuteront des vibrations de même période τ. Proposons-nous d'obtenir l'expression de leurs déplacements u, v, w. Ceux-ci devront vérifier les équations (1), et de plus, tout près de la surface $f(x, y, z) = 0$, se réduire aux valeurs données.

Nous avons appelé ζ, à la fin du § IV, une distance presque insensible, qui est le rayon à partir duquel se vérifient les lois des ondes sphériques. Ce rayon, quoique très-petit, doit encore être assez grand par rapport à la longueur d'onde $\tau\omega$, puisqu'on peut, en comparaison, négliger dans l'équation (3) le terme qui contient $\tau^2\omega^2$. Construisons, au-dessous de $f(x, y, z) = 0$, à cette distance ζ, une autre surface $f_1(x, y, z) = 0$, que nous diviserons en parties infiniment petites $d\sigma$. Prenons un point M (*fig.* 2) dans chacune de ces parties,

Fig. 2.



comme centre de sphères que nous supposerons être des ondes propagées à partir de ce point. Menons par M la normale $MM' = \zeta$, commune à $f = 0$ et à $f_1 = 0$, et faisons passer un plan $MM'N$ par cette normale et par la vibration qui a lieu effectivement en M'. Supposons que, sur les ondes sphériques, les vibrations se fassent suivant des cercles parallèles à ce plan, avec une amplitude constante le long d'un même cercle et nulle partout, excepté sur une bande de quelques degrés de part et d'autre du plan. Enfin admettons que, sur

l'onde de rayon ζ, tangente en M' à $f = 0$, l'amplitude sur le grand cercle de vibration soit égale au facteur $\frac{d\sigma}{\tau\omega\zeta}$ multiplié par celle A qui a lieu effectivement en M', et que de plus les vibrations sur la même onde aient une avance de temps $\frac{\tau}{4}$ sur celles qui ont lieu effectivement en M'. Chaque système d'ondes sphériques (*voir* la fin du § IV) donnera pour u, v, w des valeurs qui vérifieront les équations (1). Leur superposition les vérifiera donc également, et il suffira qu'elle donne en M' les valeurs effectives de u, v, w pour constituer la solution du problème. Or je vais démontrer qu'elle les donne en effet.

Concevons, à partir de M', des droites respectivement égales à ζ, augmentée de une, deux, trois, ..., demi-longueurs d'ondes, et, appuyant l'autre extrémité de ces droites sur la surface $f_1 = 0$, décrivons des cônes qui diviseront cette surface en zones contiguës. Il est clair que les ondes sphériques dont les centres se trouvent sur une même zone enverront en M' des mouvements en partie concordants, tandis que les mouvements envoyés par deux zones voisines seront discordants. Ces zones auront une surface croissante à partir de la zone centrale, mais leur partie active n'en sera bientôt qu'une très-petite fraction, puisque sur chaque onde sphérique les vibrations n'existent qu'aux environs d'un grand cercle. Les mouvements envoyés en M' par les diverses zones augmenteraient cependant d'une zone à l'autre, à cause de la grandeur croissante de celles-ci, si l'amplitude n'était en raison inverse de la distance. Ces deux causes se compensent à peu près pour les zones situées à une distance finie de M'; mais l'effet de celles-ci est très-faible, puisqu'elles ne sont actives, relativement à la molécule M', que sur une très-petite fraction de leur étendue. La valeur totale des mouvements envoyés en M', pour u, pour v et pour w, sera donc une somme de termes décroissants, alternativement positifs et négatifs, fournis chacun par une zone. Soient, pour le premier déplacement u,

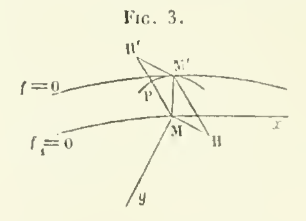
$$u', \quad u' + \Delta u', \quad u' + 2\Delta u' + \Delta\Delta u'$$

trois consécutifs de ces termes pris en valeur absolue. ζ étant assez

grand par rapport à la longueur d'onde, deux zones contiguës ont presque la même action sur la molécule M', et les termes qu'elles donnent varient peu et avec continuité de l'un à l'autre. Ce principe peut tout au plus paraître douteux pour les zones centrales, qui sont dans une position exceptionnelle; mais nous verrons dans un instant qu'il s'étend même à celles-là. Par suite $\Delta\Delta u'$ par rapport à $\Delta u'$ et $\Delta u'$ par rapport à u' sont extrêmement petits. Comme deux termes consécutifs ont signe contraire, chacun, $u' + \Delta u'$ par exemple, peut être détruit par la moitié du précédent $\frac{u'}{2}$ et par la moitié du suivant $\frac{u'}{2} + \Delta u' + \frac{\Delta\Delta u'}{2}$, sauf erreur égale à $-\frac{\Delta\Delta' u}{2}$. On peut ainsi annuler le second terme, le quatrième, le sixième, etc., avec la moitié du premier, avec le troisième, le cinquième, etc. La somme des erreurs commises sera de l'ordre de $\Sigma\Delta\Delta u'$, ou de $\Delta u'$, c'est-à-dire négligeable. Il ne restera que la moitié du premier, plus une portion du dernier, qui est insignifiant. Par conséquent l'action totale des zones sur le mouvement de M' se réduit sensiblement à la moitié de celle de la première zone.

Prenons, à partir du point M, Mx (*fig.* 3), dans le sens de la vibration qui se fait en M', pour axe des x, et la perpendiculaire My dans le plan tangent à $f_1 = 0$ pour axe des y. Les déplacements effectifs et

Fig. 3.



donnés de la molécule M' auront pour expressions, en comptant le temps à partir du commencement d'une vibration,

$$(33) \qquad u = A\cos\frac{2\pi t}{\tau}, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Il faut donc démontrer que les moitiés de ceux fournis par la première zone ont les mêmes expressions.

Pour cela, décrivons, du point M comme centre, l'onde sphé-

rique M′P. Considérons un élément $d\sigma$ de la surface $f_1 = 0$, situé en H(x, y), très-près du point M. Le rayon HM′, qui en émane, est parcouru par les ondes sphériques de la même manière et dans le même temps que le serait son égal et parallèle MH′, limité en haut à la surface $f = 0$. La vibration envoyée en M′ par l'élément $d\sigma$ est donc en retard sur celle que lui envoie M, de tout le temps employé à parcourir la portion PH′ de MH′, qui est hors de l'onde M′P. D'ailleurs, PH′ étant sensiblement perpendiculaire au plan de xy, vaut $\frac{\overline{M'H'}^2}{2MM'} = \frac{x^2+y^2}{2\zeta}$; le temps employé à le parcourir sera $\frac{x^2+y^2}{2\zeta\omega}$. Les valeurs de u, v, w, envoyées en M′ par l'élément $d\sigma$, sont donc à très-peu près

$$u = \frac{A\,d\sigma}{\tau\omega\zeta}\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\frac{\tau}{4}-\frac{x^2+y^2}{2\zeta\omega}\right),\quad v=0,\quad w=0.$$

En intégrant dans toute l'étendue d'une portion de la surface $f_1 = 0$, on aura les déplacements envoyés en M′ par cette portion de surface. Quand celle-ci est circulaire et a pour centre M, on peut la décomposer en tranches concentriques de rayon r_1, de largeur dr_1 et d'étendue $\pi d(r_1^2)$. L'intégrale cherchée sera, pour u,

$$\begin{aligned}\frac{\pi A}{\tau\omega\zeta}\int d(r_1^2)\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t+\frac{\tau}{4}-\frac{r_1^2}{2\omega\zeta}\right)\\ =\frac{\pi A}{\tau\omega\zeta}\Big[\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\frac{\pi}{2}\right)\int\cos\frac{\pi r_1^2}{\tau\omega\zeta}\,d(r_1^2)\\ +\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}+\frac{\pi}{2}\right)\int\sin\frac{\pi r_1^2}{\tau\omega\zeta}\,d(r_1^2)\Big].\end{aligned}$$

Si l'étendue considérée est celle de la $i^{ième}$ zone, la limite inférieure de $\frac{r_1^2}{\tau\omega\zeta}$ sera $i-1$, et la limite supérieure i. L'intégrale est donc, en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que i est impair ou est pair, $\pm 2A\cos\frac{2\pi t}{\tau}$. Ce résultat est bien le même, au signe près, pour les diverses zones voisines de la première : ce qui démontre pour ces zones le principe émis plus haut, que la différence entre les effets de deux consécutives est très-petite. Quant aux déplacements v et w,

ils sont sensiblement nuls, et le principe s'y étend sans démonstrations. De plus, les moitiés des valeurs de u, v, w, données par la première zone, sont bien identiques à (33), ce qu'il fallait démontrer.

Les formules d'intensité que Fresnel a établies dans sa théorie de la diffraction, et qu'on trouve dans les cours de physique, découleront de notre analyse; mais celles qui donnent la phase ou l'anomalie devront être diminuées de $\frac{\pi}{2}$: cela provient de ce que, dans les ondes sphériques élémentaires, les vibrations se trouvent en avance d'un quart par rapport à celles qui sont directement données sur la première onde $f(x, y, z) = 0$.

Les mêmes raisonnements ne sont pas applicables aux ondes longitudinales; car, dans ce cas, l'amplitude des vibrations serait constante sur toute une même onde sphérique (§ III), et les zones que nous avons considérées, devenues actives dans toute leur étendue, n'auraient plus des influences décroissantes de l'une à l'autre sur les mouvements produits en M'. Il paraît donc que les formules de la diffraction ne pourraient pas être étendues aux ondes sonores.

Nous avons supposé le milieu isotrope; si c'est un corps biréfringent presque isotrope, on raisonnera de la même manière. Il y aura toutefois les différences suivantes : 1° les lignes de vibration données sur $f(x, y, z) = 0$, au lieu d'être arbitraires, seront déterminées par la nature du milieu, car les vibrations seront dirigées, aux divers points de la surface, comme dans les ondes planes tangentes à la surface en ces points; 2° on prendra la droite MM', non pas exactement normale aux deux surfaces $f = 0$, $f_1 = 0$, mais telle que l'onde presque sphérique dont le centre est en M et qui passe par M' soit tangente en ce point à la surface $f = 0$; 3° sur cette onde, la bande très-mince sur laquelle l'amplitude n'est pas nulle ne sera généralement plus circulaire, mais elle suivra la ligne de vibration, située sur la même onde, qui est tangente en M' à la ligne de vibration directement donnée sur la surface $f = 0$ (d'après l'observation qui termine le § VII, l'erreur commise en supposant l'amplitude nulle partout ailleurs que sur cette bande, sera très-petite de l'ordre de $\tau\omega$ multiplié par le pouvoir biréfringent, et pourra être négligée dans les phéno-

mènes étudiés); 4° les zones décrites autour du point M sur $f_1 = 0$ seront telles, que les rayons menés à M' à partir des divers points de leurs contours soient parcourus par les ondes dans des temps dépassant d'un nombre entier de fois $\frac{\tau}{2}$ celui qu'elles mettent à parcourir MM'. Comme les ondes sont à peu près sphériques, les quantités telles que PH' auront sensiblement la même valeur à une même distance de M'; donc ces zones seront encore circulaires, près du point M, et, sauf la direction différente de MM', on obtiendra les mêmes résultats que pour un milieu isotrope.

Note sur l'application de la théorie du mouvement varié des liquides imparfaits à l'étude des tremblements de terre;

Par M. Anatole DE CALIGNY.

Il ne paraît pas qu'on se soit jamais occupé des phénomènes de coups de bélier hydraulique qui peuvent se présenter dans les matières en fusion, telles que les laves ou les matières souterraines quelconques que l'on suppose exister à l'état liquide sous la croûte solide dont le globe de la Terre est entouré. Les phénomènes de cette espèce de mer souterraine ne peuvent pas être cependant de la même nature, à beaucoup près, que ceux des mouvements des mers à ciel ouvert, qui peuvent s'étendre en montant sur les plages, quand même ces matières souterraines auraient autant de fluidité que nos mers.

Supposons que, par une cause quelconque, par exemple soit à la suite de l'affaissement ou de l'effondrement d'une caverne, soit à la suite d'un soulèvement, le liquide souterrain trouve une place pour s'y précipiter, l'effet pourra être d'abord analogue à celui du coup de bélier des vagues au-dessous d'un rocher. Mais, abstraction faite de ce qu'on peut concevoir d'analogue au premier aperçu, il est intéressant d'étudier le mode de propagation du mouvement que suit cette première colonne liquide.

Si l'on peut comparer ce mouvement à celui d'une grande colonne d'eau dont une extrémité déboucherait dans un réservoir, l'autre extrémité étant fermée par un robinet qu'on ouvrirait subitement, le cas n'est pas du tout le même, surtout si l'on tient compte de la nouvelle théorie de la chaleur.

Il résulte, en effet, des expériences décrites dans mon Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1837, et couronné par cette Aca-

démie en 1839, qu'à l'instant où l'on débouche subitement un long tuyau de conduite, la pression du réservoir dont il s'agit étant employée à engendrer du mouvement dans toute la colonne liquide, un jet d'eau sortant par un petit orifice près du robinet cesse complétement, et la vitesse engendrée est d'abord très-faible dans toute cette colonne.

L'effet n'est pas le même quand on débouche subitement un tuyau rempli d'air comprimé, comme on le voit par l'explosion qui chasse avec rapidité des poussières attachées aux parois intérieures de ce tube. On conçoit que chaque tranche d'air comprimé renferme en elle-même une cause de détente rapide, tandis que la colonne liquide précitée recevait, par une de ses extrémités, l'action d'une force bien distincte d'elle-même, c'est-à-dire que l'eau est si peu compressible, que le travail provenant de la détente de cette eau comprimée était insignifiant.

N'y a-t-il pas lieu de croire que les matières en fusion, telles que les laves, qui d'ailleurs sont rejetées avec tant de force par les volcans, peuvent être considérées comme ayant en elles-mêmes, ou par suite des pressions énormes auxquelles elles sont soumises de toutes parts, une force d'expansion rapprochant bien plutôt le phénomène de celui de l'explosion de l'air comprimé dont je viens de parler que de celui de la colonne liquide subitement débouchée par le robinet précité, surtout si l'on tient compte de l'état de vibration admise par la nouvelle théorie de la chaleur?

Si l'on peut admettre, d'après ces considérations, une certaine facilité de propagation du mouvement des matières souterraines en fusion, il est intéressant d'examiner ce qui peut s'y présenter d'analogue aux mouvements des liquides connus, en tenant compte de ce que la partie inférieure de la croûte terrestre n'est pas supposée, je crois, en général du moins, par beaucoup de géologues, plus horizontale que la partie supérieure, sauf les vallées creusées par le mouvement des eaux.

C'est bien plutôt à ce qui se présenterait au fond d'une mer d'une très-grande profondeur, si le mouvement pouvait s'y propager avec une assez grande force, qu'à ce qui se présente à la surface, que les phénomènes doivent être comparés. Le cas, au reste, ne serait pas, à

beaucoup près, rigoureusement analogue, en supposant même que tout fût égal d'ailleurs quant à la fluidité, la croûte terrestre étant assez épaisse pour résister plus complétement aux coups de bélier. Mais on conçoit par là même que ces coups doivent avoir une puissance dont celle des flots ne peut sans doute donner qu'une idée très-imparfaite.

Si l'on suppose que les continents et les îles aient été formés par voie de soulèvement, que par conséquent le dessous de la partie qui supporte les mers soit moins élevé que le dessous de la partie qui supporte les continents, et qu'il y ait, par une cause quelconque, un mouvement du liquide intérieur dirigé vers les régions qui supportent les mers, ce liquide, aux points de jonction de ces deux surfaces, rencontrera une véritable plage inclinée. Mais il est bien à remarquer qu'en frappant cette plage latéralement par-dessous, son mouvement, tout en se décomposant et tendant à se diriger de haut en bas, n'aura pas la liberté que rencontrent les flots sur une plage inclinée, parce qu'ils trouveront devant eux un espace rempli de liquide, quand même le degré de fluidité serait le même dans les deux cas.

Il semble donc qu'il peut y avoir plus de chances, toutes choses égales d'ailleurs quant au climat, etc., pour qu'il se présente des tremblements de terre à ces points de jonction entre les mers et les continents ou les îles, qu'à tout autre endroit. Il paraît, en effet, que c'est dans les contrées maritimes que les tremblements de terre ont, dès le temps d'Homère, été le plus souvent remarqués.

Mais, si les considérations précédentes sont rationnelles, il semble que ce n'est pas précisément à *Neptune* qu'Homère aurait dû les attribuer, s'ils résultent plutôt de la réaction de la partie de la croûte terrestre qui supporte les mers et reçoit d'abord les chocs directs, et si ces derniers ne se font souvent sentir aux terres que par réaction.

Je reviendrai sur ce sujet quand je connaîtrai le résultat des expériences dont le P. Secchi me fait l'honneur de s'occuper, d'après mes indications, sur les frottements de l'eau soumise à des pressions énormes, les conditions précédentes s'appliquant d'ailleurs, jusqu'à un certain point, à des liquides imparfaits.

J'ajouterai seulement ici que si le mouvement des matières en fusion, au lieu de frapper immédiatement une surface inclinée, rencontre

d'abord un renflement sous une surface soulevée, ce renflement étant même supposé déjà rempli de liquide, il pourra se présenter des tourbillons par suite desquels l'état de la question pourra être modifié de tant de manières, qu'on ne doit sans doute présenter qu'avec une extrême réserve des hypothèses sur des mouvements susceptibles d'être accompagnés aussi de tourbillons qui se présenteraient si, contrairement à l'hypothèse ci-dessus indiquée, la direction des mouvements partait de la portion inférieure de la croûte terrestre qui supporte les mers.

Mais abstraction faite même de toute considération particulière de ce genre, il était d'autant plus intéressant de faire entrevoir la variété des applications qui peuvent être faites du principe des forces vives à la théorie des tremblements de terre, qu'il en résulte d'ailleurs immédiatement qu'aucune limite ne pouvant être assignée à la puissance des *coups de bélier souterrains*, cela seul suffirait pour répondre à des objections sur la force nécessaire pour soulever les matières en fusion des volcans, si leur *cheminée* a toute l'épaisseur de la croûte terrestre.

Depuis que j'ai présenté ces idées à l'Académie des Sciences, en 1866, pendant que j'étais à la campagne, j'ai repris l'étude de cette question, en tenant compte des diverses hypothèses faites sur la nature de la fluidité des matières souterraines supposées en fusion, d'autant plus qu'il paraît résulter de la coïncidence de divers tremblements de terre avec certaines époques de l'année que, dans tous les cas, on doit admettre des espèces de *marées souterraines* [*].

Je crois, après y avoir de nouveau réfléchi, qu'en supposant même ces matières plutôt à l'état pâteux qu'à l'état liquide, en un mot, quelque imparfaits que soient ces liquides, les hypothèses que j'ai proposées sur ce sujet n'en pourront pas moins trouver d'utiles applications quand on aura suffisamment multiplié les observations sur les tremblements de terre.

A ce sujet, il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer comment on

---

[*] Aux faits de ce genre rappelés dernièrement par M. Élie de Beaumont, je pourrais joindre ceux dont je dois la connaissance à mes confrères de l'Académie des Georgofili de Florence, et notamment au savant Secrétaire perpétuel de cette Académie.

peut, dans bien des circonstances, donner une certaine rigueur aux résultats, en faisant des observations qui s'y rapportent *longtemps après la cessation du phénomène*. Ainsi, dans un château où je me trouvais à l'époque d'un tremblement de terre, en 1866, on n'entendit pas toutes les sonnettes s'agiter par suite de la commotion : on entendit seulement celles dont les ressorts étaient disposés dans une direction où elles pouvaient être facilement agitées, à cause de la direction générale du mouvement du tremblement de terre.

Or on conçoit, d'après ce qui a été dit ci-dessus, que si l'on pouvait, par des moyens semblables, donner plus de sûreté aux observations, il ne serait peut-être pas impossible d'en tirer quelques conséquences sur la forme intérieure de la croûte terrestre, même dans des contrées où la surface extérieure a été très-modifiée par les mouvements des eaux.

Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides;

PAR M. J. BOUSSINESQ [*].

Ce Mémoire a principalement pour but de montrer : en premier lieu, que les formules données par Navier, pour représenter les mouvements des fluides en tenant compte du frottement, sont exactes et d'accord avec les faits (sauf une modification à introduire dans les conditions relatives à la surface), lorsque les vitesses des molécules fluides varient d'une manière continue d'un point aux points voisins; en deuxième lieu, que, si les mêmes formules ne s'appliquent pas aux mouvements dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts, cela doit tenir à ce que les molécules fluides décrivent alors des lignes sinueuses, et, par leurs passages irréguliers les unes devant les autres, développent des résistances très-différentes de celles qui auraient lieu si les vitesses ne variaient pas brusquement d'un point aux points voisins. Les mouvements sont bien réguliers dans les tubes capillaires : aussi les expériences très-précises de M. Poiseuille sur l'écoulement permanent des liquides dans de pareils tubes [**], et celles de M. Graham sur la transpiration des gaz [***], sont-elles complétement d'accord avec la théorie.

---

[*] Ce travail a été présenté le 27 juillet 1868 à l'Académie des Sciences, qui, dans sa séance du 3 août, en a ordonné l'insertion au *Recueil des Savants étrangers*. Depuis j'ai ajouté les §§ VI, XI, XII : M. de Saint-Venant, auteur du Rapport, a bien voulu m'indiquer les questions qui sont traitées dans ces paragraphes.

[**] *Comptes rendus* (27 novembre 1843, t. XVII, p. 124). *Voir* aussi les expériences antérieures de Girard (*Mémoires de l'Institut*, 1813, 1814, 1815), et celles de Coulomb (*Mémoires de la première classe de l'Institut*, an VI, t. III).

[***] *Physique moléculaire* de M. l'Abbé Moigno, p. 117.

Je trouve d'abord des équations indéfinies qui reviennent à celles de Navier. Je les établis presque sans calcul, et sans avoir besoin d'admettre, entre deux molécules très-voisines, une attraction ou une répulsion proportionnelles à la vitesse avec laquelle elles s'écartent ou s'approchent l'une de l'autre. La modification que je fais subir aux conditions relatives à la surface, modification vraisemblable *à priori* et montrée nécessaire par les faits, consiste à supposer la vitesse nulle près d'une paroi mouillée.

J'étudie ensuite le mouvement d'un liquide par filets rectilignes et parallèles. Il existe pour la dépense, soit dans l'état permanent des vitesses, soit dans leur état variable, des lois simples qui conviennent à toutes les sections normales de même forme, quelle que soit cette forme. Je démontre ces lois, et je traite spécialement les deux cas d'une section elliptique et d'une section rectangulaire.

La méthode employée dans la question précédente me permet d'obtenir les lois de l'écoulement des fluides dans les tubes très-étroits, droits ou courbes, et de section normale variable.

Je termine par un essai sur le mouvement permanent des liquides dans des tubes ou des canaux horizontaux à axe circulaire. Le mouvement ne peut se faire par filets circulaires et conaxiques que dans le seul cas où le liquide n'a ni fond, ni couvercle, mais est indéfini dans le sens vertical. S'il y a un fond et une surface libre, les molécules liquides, en même temps qu'elles avancent parallèlement à l'axe du lit, sont animées d'un mouvement transversal : celles qui sont près de la surface libre et possèdent la plus grande vitesse, vont à la dérive du côté du bord extérieur ou concave; les plus superficielles sont même jetées contre ce bord; puis elles plongent, perdent une partie de leur vitesse et refluent vers le bord convexe où elles remontent pour recommencer un trajet pareil. La masse fluide n'avance donc qu'en se tordant sans cesse, ou en formant un tourbillon. Lorsque le liquide est contenu dans un tube qu'il remplit, il y a deux tourbillons au lieu d'un. Le liquide contenu dans la moitié inférieure du tube en forme un premier pareil au précédent, et celui qui remplit la partie supérieure en forme un second symétrique du premier.

On sait qu'aux tournants des rivières la berge concave est sans cesse creusée, tandis que la berge convexe s'atterrit : cela doit être en

effet, si les eaux sont jetées avec force contre la première et arrivent, au contraire, avec une petite vitesse sur la seconde.

§ I. — *Forces développées dans les fluides par le mouvement.*

Un fluide naturel, dont les molécules glissent à côté les unes des autres et s'écartent beaucoup des positions relatives qu'elles occupaient d'abord, peut être assimilé à un corps peu solide qui se déformerait sous l'action des plus petits efforts, et qui, dans son mouvement, passerait par une infinité d'états moléculaires distincts. Dans chacun de ces états, le corps pourrait rester en équilibre; mais le mouvement les détruit aussitôt après qu'ils se sont formés, pour les remplacer par d'autres. La résistance qu'oppose le fluide à sa déformation durant un instant très-court, est évidemment d'autant plus grande qu'est plus grand lui-même le nombre d'états moléculaires par lesquels il passe dans cet instant : cela revient à dire qu'elle dépend, en chaque point, de la vitesse relative des molécules très-voisines du point considéré. Cette résistance constitue, par ses composantes tangentielles, le frottement des fluides : nous nous proposons de l'évaluer.

Soient : x, y, z trois coordonnées rectangulaires d'un point M de l'espace; u, v, w les composantes suivant les axes, à l'époque t, de la vitesse que possède la molécule qui passe en M à cette époque. Si nous supposons les mouvements continus, c'est-à-dire les vitesses peu variables d'un point aux points voisins, les composantes, suivant les axes, de celle de la molécule qui passe en un point $(x+h,\ y+k,\ z+l)$ très-voisin de M, seront sensiblement

$$u+\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l,$$
$$v+\frac{dv}{dx}h+\frac{dv}{dy}k+\frac{dv}{dz}l,$$
$$w+\frac{dw}{dx}h+\frac{dw}{dy}k+\frac{dw}{dz}l.$$

On voit que les vitesses relatives des molécules voisines de M sont déterminées par les dérivées partielles de u, v, w en x, y, z. Donc les forces développées par le mouvement dépendront de ces dérivées.

Concevons qu'on mène en M un élément plan quelconque, dont la normale fasse avec les axes des angles ayant respectivement pour cosinus d, e, f. Soient p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} les trois composantes, suivant les mêmes axes, de la force rapportée à l'unité de surface qui est exercée sur cet élément plan du côté où l'on a mené la normale. Les raisonnements exposés aux §§ 7 et 9 des *Leçons sur l'Élasticité* de M. Lamé, donneront

$$(1)\qquad \begin{cases} p_{nx} = N_1\,d + T_3\,e + T_2\,f, \\ p_{ny} = T_3\,d + N_2\,e + T_1\,f, \\ p_{nz} = T_2\,d + T_1\,e + N_3\,f, \end{cases}$$

N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 désignant les composantes des forces exercées sur l'unité de surface des trois éléments perpendiculaires aux axes. Nous venons de voir qu'elles sont fonctions de $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$: comme nous n'avons pas de raison pour supposer les dérivées partielles de ces fonctions nulles ou infinies pour des valeurs nulles des variables, nous pourrons les développer par la série de Maclaurin, et nous arrêter même aux termes du premier degré quand les dérivées partielles de u, v, w en x, y, z ne seront pas trop grandes. Les expressions des forces développées par le mouvement seront donc pareilles à celles des forces élastiques dans un corps solide : seulement u, v, w y désigneront, non pas, comme pour les forces élastiques, les trois déplacements suivant les axes de la molécule dont x, y, z sont les coordonnées primitives, mais bien les trois vitesses suivant les mêmes axes de la molécule qui passe en (x, y, z) à l'époque t. Si nous observons qu'un fluide est isotrope, et que, d'autre part, lors d'un changement de coordonnées rectangulaires en d'autres rectangulaires, les vitesses u, v, w se transforment comme les déplacements de même nom relatifs à la théorie de l'élasticité, et les actions spéciales aux fluides, d'après (1), comme les forces élastiques, nous verrons que l'isotropie permet de mettre les premières de ces forces sous la même forme que les secondes. En désignant par p, K, H trois coefficients indépendants de u, v, w, et par θ la somme $\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}$, nous aurons donc, comme pour les forces élas-

tiques dans un milieu isotrope,

$$(2)\quad\begin{cases} N_1 = -p + K\theta + 2H\dfrac{du}{dx}, & T_1 = H\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right),\\ N_2 = -p + K\theta + 2H\dfrac{dv}{dy}, & T_2 = H\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right),\\ N_3 = -p + K\theta + 2H\dfrac{dw}{dz}, & T_3 = H\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right) \text{ [*]}. \end{cases}$$

Le coefficient p représente la pression qui serait exercée au point (x, y, z) du fluide, si les molécules perdaient instantanément leurs vitesses tout en gardant les mêmes places relatives. Quant aux coefficients H et K, ils varient sans doute avec la nature du fluide, et avec tous les éléments qui modifient sa constitution, tels que, par exemple, la température et la pression. Mais, lorsque ces éléments ne changent pas beaucoup, on peut négliger les variations de H et K, qui sont très-petites par rapport à H et K eux-mêmes.

Cherchons les équations du mouvement. Soient : ρ la densité du fluide; X, Y, Z les composantes, suivant les axes, de la force extérieure qui agit sur l'unité de masse; u', v', w' les trois accélérations, suivant les axes, de la molécule M. La considération du parallélipipède rectangle élémentaire donnera les trois équations du mouvement. La première est

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X = \rho u',$$

ou bien, d'après les formules (2), si nous représentons avec M. Lamé par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, et si nous substituons à u' sa valeur connue,

$$(3)\quad -\frac{dp}{dx} + (H+K)\frac{d\theta}{dx} + H\Delta_2 u + \rho X = \rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right).$$

Les deux autres équations se déduisent de celle-là par une ou par deux permutations circulaires, effectuées sur : x, y, z; u, v, w; X, Y, Z

[*] *Voir* la Note I, à la fin du Mémoire.

Dans le cas d'un liquide, c'est-à-dire d'un fluide sensiblement incompressible, on sait que la condition de continuité est

$$(4)\qquad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0;$$

ce qui annule dans (2) les termes en K et dans (3) le terme en H + K. Ces formules deviennent ainsi pareilles à celles qu'à trouvées Navier.

A la surface du fluide, les vitesses u, v, w devront vérifier des relations spéciales, que nous chercherons seulement pour deux cas particuliers :

1° Près d'une paroi fixe mouillée par le fluide, les trois composantes u, v, w seront nulles. En effet, puisque une différence extrêmement petite de vitesse entre molécules très-voisines développe une force sensible, une différence finie de vitesse entre les molécules de la paroi et celles du fluide en contact développerait un frottement incomparablement plus considérable. Ce frottement, pour faire équilibre à l'action tangentielle exercée par le fluide sur sa surface, devra donc correspondre à une vitesse très-petite et analytiquement nulle.

2° A la surface libre d'un liquide, nous admettrons que ce liquide n'éprouve pas un frottement appréciable de la part du gaz adjacent. Les trois conditions s'obtiendront, en exprimant que les deux composantes tangentielles de la force exercée par le liquide sur sa surface libre sont nulles, et que la composante normale fait équilibre à la pression atmosphérique.

§ II. — *Mouvement rectiligne d'un liquide.*

Nous allons traiter en détail le cas d'un liquide homogène dont les molécules se meuvent suivant des droites parallèles. La surface sera un cylindre, parallèlement aux génératrices duquel nous prendrons l'axe des x. On aura donc

$$v = 0, \quad w = 0;$$

la condition (4) de continuité, réduite à

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

montre que la valeur u de la vitesse est seulement fonction de y, z et t. Enfin, nous admettrons que les composantes X, Y, Z de la force extérieure soient les trois dérivées partielles en x, y, z d'une même fonction U, en sorte que

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}.$$

Les formules (2) deviennent

$$(5) \qquad N_1 = N_2 = N_3 = -p, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = H\frac{du}{dz}, \quad T_3 = H\frac{du}{dy},$$

et celles du mouvement

$$(6) \quad \frac{dp}{dx} - \rho\frac{dU}{dx} = H\,\Delta_2 u - \rho\frac{du}{dt}, \quad \frac{dp}{dy} - \rho\frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dp}{dz} - \rho\frac{dU}{dz} = 0.$$

En retranchant de la première, différentiée par rapport à y, la seconde, différentiée par rapport à x, il vient

(6 *bis*)
$$\frac{d}{dy}\left(H\,\Delta_2 u - \rho\frac{du}{dt}\right) = 0.$$
On aura de même
$$\frac{d}{dz}\left(H\,\Delta_2 u - \rho\frac{du}{dt}\right) = 0.$$

On sait d'ailleurs que u ne dépend pas de x. Donc, en désignant par $\varphi(t)$ une fonction du temps, la même pour tous les points du fluide, on pourra poser

$$(7) \qquad H\,\Delta_2 u - \rho\frac{du}{dt} = \varphi(t).$$

Cette relation, comparée à la première (6), donne

$$(8) \qquad \varphi(t) = \frac{dp}{dx} - \rho\frac{dU}{dx}.$$

Les trois équations (6), respectivement multipliées par dx, dy, dz, ajoutées et intégrées, deviennent elles-mêmes

$$(9) \qquad p = \text{une fonction } \psi(t) + \rho U + x\varphi(t).$$

On déterminera $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, en exprimant que la pression p prend, en deux points, situés par exemple l'un au commencement et l'autre à la fin du canal rectiligne qui contient le liquide, deux valeurs données à chaque instant.

Occupons-nous actuellement des conditions relatives à la surface.

1° Près d'une paroi mouillée, on aura

$$u = 0. \tag{9 bis}$$

2° Près de la surface libre, la pression normale exercée du dehors sur le liquide sera égale et contraire à l'action du liquide lui-même sur sa surface.

Évaluons les composantes suivant les trois axes de cette dernière action, soit à la paroi, soit sur la surface libre. Menons au liquide une section normale, et appelons

$$ds$$

un élément du contour de cette section, dy et dz les projections de cet élément sur l'axe des y et sur celui des z. La normale à la surface, menée en un point de l'élément ds vers l'intérieur du liquide, fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\mathfrak{d} = 0, \quad \mathfrak{e} = \frac{\mp dz}{ds}, \quad \mathfrak{f} = \frac{\pm dy}{ds},$$

les signes supérieurs ou les signes inférieurs devant être adoptés suivant qu'on parcourt l'élément ds à partir d'une de ses extrémités ou à partir de l'autre. Les formules (1) et (5) donneront, pour les trois composantes de l'action exercée par le liquide sur sa surface,

$$p_{nx} = \mp \mathrm{H}\left(\frac{du}{dy}\frac{dz}{ds} - \frac{du}{dz}\frac{dy}{ds}\right), \quad p_{ny} = -p\frac{\mp dz}{ds}, \quad p_{nz} = -p\frac{\pm dy}{ds}.$$

Les deux dernières équivalent à une composante normale $-p$; la première est tangentielle. En appelant p_0 la pression exercée sur la surface libre par l'atmosphère environnante, nous aurons donc, aux divers points de cette surface, $p_0 = p$. D'où, d'après (9), l'équation de la surface libre

$$p_0 = \psi(t) + \rho\mathrm{U} + x\varphi(t). \tag{10}$$

En ses divers points, la composante p_{nx} est nulle, et l'on a la condition

$$(11) \qquad \frac{du}{dy}dz - \frac{du}{dz}dy = 0 \text{ (surface libre).}$$

§ III. — *État permanent et état variable.*

Admettons que les composantes X, Y, Z de l'action extérieure soient indépendantes du temps, ainsi que les pressions exercées en deux points fixes. Les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ se réduiront à deux constantes; p ne dépendra pas de t, et il devra en être de même de p_0.

Posons

$$(12) \qquad \frac{-\varphi(t)}{\mathrm{H}} = \mathrm{L}, \quad \frac{\rho}{\mathrm{H}} = \mathrm{L}_1;$$

les équations du mouvement seront, en vertu de (7), (9 *bis*) et (11),

$$(13) \quad \begin{cases} \text{à l'intérieur du fluide, } \Delta_2 u + \mathrm{L} = \mathrm{L}_1 \dfrac{du}{dt}; \\ \text{à la surface-enveloppe } \begin{cases} \text{soit } u = 0 \text{ (paroi),} \\ \text{soit } \dfrac{du}{dy}dz - \dfrac{du}{dz}dy = 0 \text{ (surface libre).} \end{cases} \end{cases}$$

Le mouvement sera permanent, si l'on met pour u une valeur V, qui vérifie ces équations en y faisant $\frac{d\mathrm{V}}{dt} = 0$. On obtient ainsi, avec les mêmes conditions à la surface, l'équation indéfinie

$$(14) \qquad \Delta_2 \mathrm{V} + \mathrm{L} = 0.$$

Généralement, on posera $u = \mathrm{V} + \mathrm{V}_0$, V_0 désignant la partie de u qui tend vers zéro à mesure que le mouvement approche d'être permanent, et l'on aura

$$(15) \quad \begin{cases} \text{à l'intérieur du liquide, } \Delta_2 \mathrm{V}_0 = \mathrm{L}_1 \dfrac{d\mathrm{V}_0}{dt}, \\ \text{à la surface, soit } \mathrm{V}_0 = 0, \quad \text{soit } \dfrac{d\mathrm{V}_0}{dy}dz - \dfrac{d\mathrm{V}_0}{dz}dy = 0. \end{cases}$$

§ IV. — *État permanent : lois générales.*

Cherchons d'abord, pour l'état permanent, les lois générales de la dépense, c'est-à-dire celles qui régissent tous les cylindres liquides de même forme, quelle que soit cette forme.

Supposons en premier lieu que le volume liquide ait des dimensions données et que $L = 1$. Soit $f(y, z) = 0$ l'équation de la surface, qui est en partie paroi et en partie surface libre. Les équations du mouvement seront

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2 V}{dy^2} + \dfrac{d^2 V}{dz^2} + 1 = 0, \\ \text{et, pour } f(y, z) = 0, \quad \text{soit } V = 0, \quad \text{soit } \dfrac{dV}{dy} dz - \dfrac{dV}{dz} dy = 0. \end{array}\right.$$

Concevons maintenant un autre volume liquide, de section normale semblable à celle du premier, ayant sa surface paroi ou libre comme aux endroits homologues de celui-ci, et où L ait une valeur quelconque. En désignant par a le rapport de similitude et posant $y' = ay$, $z' = az$, y', z' seront les coordonnées du point de sa section normale, homologue au point (y, z) de la section pareille du premier volume. L'équation de la surface sera toujours $f(y, z) = 0$, et, si V' est la vitesse, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2 V'}{dy'^2} + \dfrac{d^2 V'}{dz'^2} + L = 0, \quad \text{ou bien} \quad \dfrac{d^2 \dfrac{V'}{La^2}}{dy^2} + \dfrac{d^2 \dfrac{V'}{La^2}}{dz^2} + 1 = 0; \\ \text{pour } f(y, z) = 0, \text{ soit } V' = 0, \text{ soit } \dfrac{dV'}{dy'} dz' - \dfrac{dV'}{dz'} dy' = 0, \\ \text{ou bien soit } \dfrac{V'}{La^2} = 0, \quad \text{soit } \dfrac{d\dfrac{V'}{La^2}}{dy} dz - \dfrac{d\dfrac{V'}{La^2}}{dz} dy = 0. \end{array}\right.$$

La quantité $\dfrac{V'}{La^2}$ est déterminée par les mêmes équations que la quantité V. On peut donc poser

$$(16) \qquad \frac{V'}{La^2} = V, \quad \text{ou} \quad V' = La^2 V.$$

D'où la loi suivante :

Si l'on considère deux volumes cylindriques de liquides différents et de dimensions différentes, mais de sections normales semblables, les vitesses permanentes en deux points homologues sont proportionnelles au coefficient L *et à la grandeur des sections.*

Pour avoir la dépense qui correspond à l'unité de temps, il faut multiplier chaque élément de la section normale par la vitesse correspondante, et intégrer dans toute l'étendue de la section. Comme deux éléments homologues des sections dans les deux volumes sont proportionnels au carré des dimensions de celles-ci, il en résulte que *la dépense est proportionnelle à leur quatrième puissance.*

Dans le cas d'un liquide pesant, supposons que l'axe des y soit horizontal, et que celui des z fasse avec la direction de la pesanteur un angle α. On aura

$$\frac{dU}{dx} = g\sin\alpha,\quad \frac{dU}{dy} = 0,\quad \frac{dU}{dz} = g\cos\alpha.$$

S'il y a une surface libre, elle aura pour équation (10) et (8)

$$p_0 = \text{const} + \rho g z\cos\alpha + x\frac{dp}{dx}.$$

D'ordinaire la pression atmosphérique p_0 est sensiblement constante, et, comme l'équation ne doit pas dépendre de x, on devra avoir $\frac{dp}{dx} = 0$. Alors, d'après (8) et (12), L est égal à $\rho g\sin\alpha$ divisé par H : donc *la vitesse sera proportionnelle à la pente, c'est-à-dire au sinus de l'inclinaison des génératrices par rapport au plan horizontal.*

Ce serait le cas du mouvement permanent de l'eau dans un canal découvert à peu près rectiligne, si ce mouvement y existait au point de vue où nous nous sommes placés.

Supposons actuellement le liquide contenu dans un tube et le remplissant. Le coefficient constant L vaudra (8) et (12) $\frac{1}{H}\left(\rho g\sin\alpha - \frac{dp}{dx}\right)$. On voit que la dérivée $\frac{dp}{dx}$ aura une valeur constante : elle s'obtiendra en divisant par la longueur du tube la différence des pressions exercées à ses deux extrémités. Si le terme $\rho g\sin\alpha$ n'a pas une influence appré-

ciable, *la dépense sera* proportionnelle à cette dérivée, c'est-à-dire *en raison directe de la différence des pressions exercées aux deux extrémités du tube et en raison inverse de sa longueur.*

§ V. — *Cas d'un tube elliptique.*

Quand le tube, rempli de liquide, est elliptique et a pour équation

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'axe des y étant d'ailleurs horizontal ou incliné, l'expression de la vitesse est

$$(17)\qquad V=\frac{L}{2}\,\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

En effet, elle satisfait à l'équation indéfinie (14), et à la condition $V=0$ sur la paroi.

On aura pour la dépense

$$(18)\qquad \iint V\,dy\,dz=L\,\frac{\pi bc}{4}\,\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}.$$

Appelons σ l'étendue de la section, égale à πbc, et cette formule pourra se mettre sous la forme

$$(19)\qquad \text{dépense}=\frac{1}{4\pi}\,\frac{L\sigma^2}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}=0{,}0796\,\frac{L\sigma^2}{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}.$$

Dans le cas d'un tube circulaire de rayon R, horizontal ou assez étroit pour que la pesanteur n'ait pas d'influence sensible sur l'écoulement, elle devient (12) et (8)

$$(19\ bis)\qquad \text{dépense}=\frac{\pi}{8H}\,\frac{-dp}{dx}\,R^4.$$

Elle est bien, conformément aux trois lois générales démontrées ci-dessus, proportionnelle à la quatrième puissance du rayon, en raison

inverse de la longueur du tube, et proportionnelle à la différence des pressions exercées à ses deux extrémités.

Si, l'axe des y étant horizontal, le liquide remplit seulement la moitié inférieure du tube, la surface libre aura pour équation $z = 0$, et la condition relative à cette surface deviendra $\frac{dV}{dz} = 0$. La même valeur de V la vérifiera, et la dépense sera la moitié de celle obtenue ci-dessus (18).

§ VI. — *Cas d'un tube rectangulaire.*

Traitons actuellement le cas d'un tube plein de liquide, à section rectangulaire. Appelons $2b$, $2c$ les deux dimensions de cette section, et prenons, à partir du centre de celle-ci, deux axes des y et des z parallèles aux côtés correspondants. Si k' désigne tout nombre entier positif,

$$k \text{ l'expression } (2k' + 1)\frac{\pi}{2},$$

et B, C des coefficients arbitraires, une valeur de V qui vérifiera l'équation indéfinie (14) sera

$$V = \frac{L}{2}\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\left\{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \sum_{k'=0}^{k'=\infty}\left[B\frac{e^{k\frac{z}{b}} + e^{-k\frac{z}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}}\cos k\frac{y}{b} + C\frac{e^{k\frac{y}{c}} + e^{-k\frac{y}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}}\cos k\frac{z}{c}\right]\right\}.$$

Pour qu'elle soit nulle aux parois, c'est-à-dire quand on y fait, soit $y = \pm b$, soit $z = \pm c$, il suffira de choisir les coefficients B et C de manière que

$$\frac{y^2}{b^2} = \sum_{k'=0}^{k'=\infty} B\cos k\frac{y}{b}, \quad \frac{z^2}{c^2} = \sum_{k'=0}^{k'=\infty} C\cos k\frac{z}{c}.$$

D'après une formule d'analyse, toute fonction paire $f(y)$, donnée entre les limites $y = -b$ et $y = +b$, a sa valeur exprimée par

$$\frac{2}{b}\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\cos k\frac{y}{b}\int_0^b f(y)\cos k\frac{y}{b}\,dy.$$

Nous devrons donc prendre

$$\mathrm{B} = \frac{2}{b}\int_0^b \frac{y^2}{b^2}\cos k\frac{y}{b}\,dy = \frac{\pm 2}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right),$$

et de même

$$\mathrm{C} = \frac{\pm 2}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right),$$

le signe $+$ correspondant à k' pair et le signe $-$ à k' impair.

L'expression définitive de la vitesse est donc

$$(17\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{V} = \frac{\mathrm{L}}{2}\,\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\Bigg\{ 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{\pm 1}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\Bigg[& \frac{e^{k\frac{z}{b}} + e^{-k\frac{z}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}}\cos k\frac{y}{b} \\ & + \frac{e^{k\frac{y}{c}} + e^{-k\frac{y}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}}\cos k\frac{z}{c}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

On aura la dépense en multipliant par $dy\,dz$, et intégrant de $y = -b$ à $y = +b$ et de $z = -c$ à $z = +c$. Représentons par σ, afin d'abréger, l'étendue $4bc$ de la section, et posons

$$(18\ bis)\quad \alpha = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3} + 2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{1}{k^3}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\left[\frac{b}{c}\,\frac{e^{k\frac{c}{b}} - e^{-k\frac{c}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}} + \frac{c}{b}\,\frac{e^{k\frac{b}{c}} - e^{-k\frac{b}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}}\right]\right\};$$

nous aurons

$$(19\ ter)\qquad \text{dépense} = \alpha\,\frac{\mathrm{L}\sigma^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer numériquement α. Nous pourrons d'abord, dans son expression, remplacer respectivement

$$\frac{e^{k\frac{c}{b}} - e^{-k\frac{c}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}}, \quad \frac{e^{k\frac{b}{c}} - e^{-k\frac{b}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}}$$

par

$$1 - \frac{2}{1 + e^{2k\frac{c}{b}}}, \quad 1 - \frac{2}{1 + e^{2k\frac{b}{c}}};$$

puis nous aurons à évaluer les trois séries

$$2\sum \frac{1}{k^3}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) = 2\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots\right) - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\left(\frac{1}{1^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \ldots\right)\right],$$

$$- 4\sum \frac{1}{k^3}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1 + e^{2k\frac{c}{b}}},$$

$$- 4\sum \frac{1}{k^3}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1 + e^{2k\frac{b}{c}}},$$

qui seront respectivement, dans la parenthèse de α, les coefficients de $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$, de $\frac{b}{c}$ et de $\frac{c}{b}$.

Considérons en général la série

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots.$$

Si on l'arrête au terme $\frac{1}{(2^n - 1)^m}$, la somme des 2^n premiers termes négligés sera inférieure à 2^n fois le premier d'entre eux, c'est-à-dire inférieure à $\frac{1}{2^{n(m-1)}}$. Les 2^{n+1} termes suivants ont de même une somme inférieure à $\frac{1}{2^{(n+1)(m-1)}}$. En continuant à grouper ainsi les termes négligés, on verra que le reste est plus petit que la progression

$$\frac{1}{2^{n(m-1)}} + \frac{1}{2^{(n+1)(m-1)}} + \frac{1}{2^{(n+2)(m-1)}} + \ldots$$

ou que

$$\frac{1}{(2^{m-1}-1)\,2^{(m-1)(n-1)}}.$$

Si nous prenons actuellement la série plus rapidement convergente

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\ldots,$$

et que nous l'arrêtions au même terme $\frac{1}{(2^n-1)^m}$, le reste

$$\frac{1}{(2^n+1)^m}+\frac{1}{(2^n+3)^m}+\ldots,\ \text{augmenté de la somme}\ \frac{1}{(2^n)^m}+\frac{1}{(2^n+2)^m}+\ldots,$$

plus grande que lui terme à terme, ne sera autre que celui de la série précédente : le reste à lui seul est donc plus petit que l'expression

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2^{m-1}-1)\,2^{(m-1)(n-1)}}.$$

Pour $m=3$ et $n=5$, cette expression vaut 0,0006; pour $m=5$ et $n=3$, elle vaut 0,0001. De telles erreurs étant suffisamment petites, on peut calculer $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots$ en s'arrêtant à $\frac{1}{31^3}$, et $\frac{1}{1^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\ldots$ en s'arrêtant à $\frac{1}{7^5}$. On trouve ainsi

$$2\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)=2(0,2713-0,2101)=0,1224,\ \text{avec erreur} < 0,0004.$$

Il reste à évaleur les deux sommes

$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{c}{b}}},$$

$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{b}{c}}},$$

qui sont beaucoup plus rapidement convergentes que la précédente.

Nous supposerons qu'on ait disposé les axes de manière que b soit $> c$. Alors le premier terme de la seconde somme est seul sensible. En effet le deuxième terme est, en valeur absolue, plus petit que

$$4\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\frac{1}{3^3}-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\frac{1}{3^5}\right]\frac{1}{1+e^{3\pi}}<0,00001.$$

En négligeant ce terme et les suivants, calculant les coefficients $\frac{4}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)$ de ceux de la première somme qui peuvent obtenir une valeur sensible, et observant enfin que $e^\pi = 23,14$, il vient

$$
(18\ ter)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha = \frac{1}{8}\Bigg\{ &\frac{1}{3} + 0,1224\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right) - \frac{c}{b}\,\frac{0,1955}{1+(23,14)^{\frac{b}{c}}} \\
&- \frac{b}{c}\left[\frac{0,1955}{1+(23,14)^{\frac{c}{b}}} + \frac{0,0348}{1+(23,14)^{3\frac{c}{b}}} + \frac{0,0080}{1+(23,14)^{5\frac{c}{b}}}\right. \\
&+ \frac{0,0030}{1+(23,14)^{7\frac{c}{b}}} + \frac{0,0014}{1+(23,14)^{9\frac{c}{b}}} \\
&+ \frac{0,0008}{1+(23,14)^{11\frac{c}{b}}} + \frac{0,0005}{1+(23,14)^{13\frac{c}{b}}} \\
&+ \frac{0,0003}{1+(23,14)^{15\frac{c}{b}}} + \frac{0,0002}{1+(23,14)^{17\frac{c}{b}}} \\
&\left. + \frac{0,0001}{1+(23,14)^{19\frac{c}{b}}}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour les valeurs particulières

1, 2, 3, 4, 5, 10 de $\frac{b}{c}$,

α vaut respectivement

0,0703, 0,0715, 0,0731, 0,0747, 0,0757, 0,0786.

Pour $\frac{b}{c} = \infty$, on peut, dans la formule (18 *bis*), négliger les termes qui ont pour coefficient $\frac{c}{b}$, et remplacer la différence et la somme $e^{k\frac{c}{b}} \mp e^{-k\frac{c}{b}}$ par $2k\frac{c}{b}$ et par 2. Alors il vient

$$\alpha = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3} + 2\sum \frac{1}{k^2}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\right].$$

Or les deux membres de l'égalité

$$\frac{y^2}{b^2} = 2\sum \frac{\pm 1}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\cos k\frac{y}{b},$$

multipliés par dy, et intégrés de $y = 0$ à $y = b$, donnent

$$2\sum \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

On aura donc, pour $\frac{b}{c} = \infty$,

$$\alpha = \frac{1}{12} = 0,0833.$$

Ainsi le coefficient α, égal à 0,0703 pour une section carrée, grandit sans cesse à mesure que la section s'aplatit, et tend vers la valeur limite 0,0833. Quand le rapport des deux dimensions est supérieur à 10, on peut faire $\alpha = 0,081$ avec une erreur relative au plus égale à $\frac{1}{40}$. Cette valeur est sensiblement la même que le coefficient 0,0796 de la formule (19) de la dépense dans un tube elliptique.

Observons, en terminant ce paragraphe, que l'expression (17 *bis*) de V donne $\frac{dV}{dz} = 0$ pour $z = 0$. Cette expression convient donc au cas d'un canal découvert à section rectangulaire, de largeur $2b$ et de profondeur c. La dépense sera la moitié de celle (19 *ter*) dans laquelle $\sigma = 4bc$.

§ VII. — *État variable.*

L'état variable est régi par les équations (15), pareilles à celles de la température dans un cylindre homogène et isotrope, athermane, ayant une portion de sa surface (la paroi) à la température zéro, et l'autre portion (surface libre) imperméable à la chaleur.

On prendra pour intégrale simple

$$V_0 = e^{-\frac{c_i^2 t}{\varepsilon_1}} W_i,$$

W_i désignant une fonction de y et de z, et c_i une constante. Les équations du mouvement deviendront

$$\left\{\begin{array}{l} \text{à l'intérieur,}\quad \frac{d^2 W_i}{dy^2} + \frac{d^2 W_i}{dz^2} + c^2 W_i = 0, \\ \text{à la surface, ou pour } f(y, z) = 0,\ \text{soit } W_i = 0,\ \text{soit } \frac{dW_i}{dy}dz - \frac{dW_i}{dz}dy = 0. \end{array}\right.$$

La quantité c_i sera racine d'une équation transcendante, et aura une infinité de valeurs distinctes. L'expression

$$(20) \qquad V_0 = \sum A_i e^{-\frac{c_i^2 t}{L_1}} W_i,$$

étendue à toutes ces valeurs, vérifiera les équations du problème. Elle sera donc l'intégrale cherchée, si pour $t = 0$ elle est égale à la valeur initiale de la portion non permanente de la vitesse. Cette valeur est une fonction donnée $F(y, z)$. En supposant qu'elle puisse être mise sous la forme $\sum A_i W_i$, des considérations qui appartiennent à la théorie de la chaleur [*] donneront, pour déterminer chaque coefficient A_i, la formule

$$A_i = \frac{\int\int F(y, z) W_i dy\, dz}{\int\int W_i^2 dy\, dz}.$$

Les intégrales sont prises dans toute l'étendue qu'enferme le contour $f(y, z) = 0$.

Cherchons maintenant comment varie la vitesse, lorsqu'on considère des volumes semblables de deux liquides, et que les valeurs initiales de V_0 sont les mêmes aux points homologues.

Soient donc : $f(y, z) = 0$ l'équation du premier volume liquide, dans lequel nous supposerons $L_1 = 1$; (20) l'expression de la vitesse non permanente dans ce volume; $y' = ay$, $z' = az$ les coordonnées, dans un deuxième volume semblable au premier, du point d'une section normale homologue à (y, z); enfin L'_1 la valeur de L_1 dans ce volume, et V'_0 la portion non permanente de sa vitesse, exprimée par

$$\sum A'_i e^{-\frac{c_i'^2}{L'_1} t} W'_i.$$

[*] *Leçons sur la Chaleur* de M. Lamé, § LIX.

On aura

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 W'_i}{dy'^2} + \dfrac{d^2 W'_i}{dz'^2} + c'^2_i W'_i = 0, \quad \text{ou bien} \quad \dfrac{d^2 W'_i}{dy^2} + \dfrac{d^2 W'_i}{dz^2} + (ac'_i)^2 W'_i = 0; \\ \text{et, pour } f(y, z) = 0, \\ \text{soit } W'_i = 0, \text{ soit } \dfrac{dW'_i}{dy'} dz' - \dfrac{dW'_i}{dz'} dy' = 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{dW'_i}{dy} dz - \dfrac{dW'_i}{dz} dy = 0. \end{cases}$$

On voit que W'_i est déterminé en y, z et ac' de la même manière que W_i en y, z et c_i. Par suite, les valeurs de ac'_i seront les mêmes que celles de c_i, et W'_i sera égal à W_i. D'ailleurs V'_0 étant, pour $t = 0$, égal à V_0, on aura

$$(20\ bis) \qquad V'_0 = \sum A_i e^{-\frac{c_i^2}{a^2 L'_1} t} W_i.$$

Au bout d'un temps égal à $a^2 L'_1 t$, la vitesse V'_0 est égale à la vitesse V_0 au bout du temps t. Donc *les vitesses spéciales à l'état variable se réduisent à une fraction donnée de leur valeur initiale, dans des temps proportionnels à* L_1 *et à la grandeur des sections normales semblables.*

La quantité totale de liquide écoulé, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$, aura pour expression

$$\iint a^2 dy\, dz \int_0^{\infty} V'_0\, dt = L'_1 a^4 \sum \frac{A_i}{c_i^2} \iint W_i\, dy\, dz.$$

Elle est proportionnelle au coefficient L_1 *et à la quatrième puissance des dimensions homologues.*

Si les vitesses des deux liquides sont nulles pour $t = 0$, V_0 et V'_0, changées de signe, vaudront à l'origine les valeurs permanentes V, V' des vitesses. On aura donc

$$\text{pour } t = 0, \quad V_0 = -V, \quad V'_0 = -V' = -La^2 V, \quad \text{d'après (16)}.$$

Les dépenses totales correspondantes à l'état variable, dépenses négatives, seront dans ces deux volumes comme 1 est à

$$La^2 \times L'_1 a^4 = LL'_1 a^6.$$

Les quantités totales de liquide qui, vers le commencement du mouvement, coulent de moins que si l'état permanent avait existé dès l'origine, sont donc entre elles comme les produits LL_1 *et comme les cubes des sections normales semblables.* L_1 est une constante, d'après (12), s'il s'agit toujours du même liquide à la même température; de plus, quand la pesanteur n'a pas d'influence sensible, L est le quotient par la longueur du tube de la différence des pressions exercées à ses deux extrémités. Donc *les quantités ci-dessus sont, comme la dépense dans l'état permanent, en raison directe de la différence des pressions et en raison inverse de la longueur.*

La forme (20), donnée à l'intégrale, a l'avantage de montrer comment V_0 tend vers zéro. Mais les résultats généraux obtenus ci-dessus peuvent se déduire directement des équations (15). En effet, celles-ci, appliquées au second volume liquide, sont

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{à l'intérieur} & \dfrac{d^2V'_0}{dy'^2}+\dfrac{d^2V'_0}{dz'^2}=L'_1\dfrac{dV'_0}{dt} \quad \text{ou bien} \quad \dfrac{d^2V'_0}{dy^2}+\dfrac{d^2V'_0}{dz^2}=\dfrac{dV'_0}{d\left(\dfrac{t}{L'_1a^2}\right)}, \\ \text{à la surface,} & \text{soit}\quad V'_0=0, \quad \text{soit}\quad \dfrac{dV'_0}{dy}dz-\dfrac{dV'_0}{dz}dy=0. \end{array}\right.$$

Elles donnent bien, pour tous les volumes liquides de même forme, et chez lesquels les portions non permanentes des vitesses ont les mêmes valeurs initiales aux points homologues,

$$V'_0 = \text{la même fonction de } y,\ z \text{ et } \frac{t}{L'_1a^2},$$

formule qui contient les résultats dont il s'agit.

Dans le cas d'un tube circulaire plein de liquide, en supposant que toutes les molécules situées à une distance r de l'axe eussent à l'origine la même vitesse, V_0 dépendrait seulement de r et t, et on prendrait pour W_i l'expression

$$1-\left(\frac{c_ir}{2}\right)^2+\left(\frac{c_i^2r^2}{2.4}\right)^2-\left(\frac{c_i^3r^3}{2.4.6}\right)^2+\ldots=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(c_ir\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Les valeurs de c_i seraient racines de l'équation transcendante qu'on obtient en égalant à zéro cette expression, après y avoir substitué à r le

rayon du tube. Mais nous ne croyons pas très-utile de nous étendre sur cette question.

§ VIII. — *Écoulement permanent d'un liquide dans un tube très-étroit imparfaitement cylindrique.*

Lorsque le liquide coule dans un tube très-étroit, son mouvement permanent est soumis à des lois simples, alors même que la section normale varie beaucoup, mais d'une manière continue, sur une longueur finie. Que le tube soit droit ou courbe, on peut, dans une petite étendue, l'assimiler sensiblement à un cylindre, et prendre l'axe des x parallèle à ses génératrices. Dans cette petite étendue, le mouvement se fait à peu près suivant des droites parallèles à l'axe des x; les composantes v, w de la vitesse y sont donc négligeables par rapport à u, et leurs dérivées de divers ordres en y et z le sont aussi relativement aux dérivées pareilles de u. Quant aux dérivées en x de u, v, w, ainsi qu'aux accélérations u', v', w', elles sont du même ordre de grandeur que les vitesses des divers filets liquides, c'est-à-dire très-petites à cause de l'étroitesse du tube. Les équations (2) et (3) deviennent donc à très-peu près (5) et (6), comme lorsque le mouvement se faisait suivant des droites parallèles. Mais la condition $\frac{du}{dx} = 0$ n'a plus lieu. Les relations (6 *bis*) seront encore vérifiées, et donneront, au lieu de (7) et (8), en supposant établi le mouvement permanent,

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{\mathrm{E}}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right) = 0, \tag{21}$$

où la parenthèse qui termine le premier membre indique une fonction de x. Si on y joint la condition $u = 0$ sur la paroi, cette relation pourra s'intégrer dans toute l'étendue d'une section normale du tube. Soit a le rapport des dimensions de cette section aux dimensions homologues d'une section semblable de grandeur fixe, prise pour terme de comparaison, et F une fonction de deux variables, la même pour toutes les sections de même forme.

La méthode du § IV donne

$$u = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right) a^2\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right). \tag{22}$$

La dépense Q, c'est-à-dire le volume qui s'écoule dans l'unité de temps, est à très-peu près

$$(23)\qquad Q = \int\int u\,dy\,dz = \frac{1}{H}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho\frac{dU}{dx}\right) I a^4,$$

I désignant l'intégrale $\int\int F\left(\frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) d\frac{y}{a}\, d\frac{z}{a}$, prise dans toute l'étendue de la section, et constante pour toutes les sections de même forme.

Si dl désigne un élément de l'axe, droit ou courbe, du tube, et l la somme des éléments pareils compris entre le commencement du tube et la section considérée, il est évident que I et a seront des fonctions déterminées de l, pourvu que la forme et la grandeur du tube en chaque point soient connues. D'ailleurs $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{dU}{dx}$ sont identiques à $\frac{dp}{dl}$ et $\frac{dU}{dl}$; de plus Q est constante. On peut donc, de (23), tirer $\frac{dp}{dl}$ et intégrer par rapport à l. Soient : p_0, p_1 les pressions exercées sur le fluide au commencement et à la fin du tube; U_0, U_1 les deux valeurs de U aux mêmes points; l_1 la longueur totale du tube. Il viendra

$$(24)\qquad \begin{cases} -p + \rho U = -p_0 + \rho U_0 + HQ\displaystyle\int_0^l \frac{dl}{Ia^4}, \\ \text{d'où}\quad Q = \dfrac{p_0 - p_1 + \rho(U_1 - U_0)}{H\displaystyle\int_0^{l_1}\frac{dl}{Ia^4}}. \end{cases}$$

Comme le terme $\rho(U_1 - U_0)$ sera généralement négligeable à côté de $p_0 - p_1$, on peut dire que *la dépense est proportionnelle à la pression $p_0 - p_1$, qui produit l'écoulement.*

Quand toutes les sections normales du tube sont semblables, I est une constante, et *la dépense varie en raison inverse de l'intégrale* $\int_0^{l_1}\frac{dl}{a^4}$.

Si en particulier le tube est conique, ou du moins le devient quand on le rectifie sans changer la grandeur de ses sections normales, en désignant par a_0, a_1 les valeurs de a à ses deux extrémités, on aura

$$a = a_0 + \frac{a_1 - a_0}{l_1}l,\qquad \int_0^{l_1}\frac{dl}{a^4} = \frac{l_1}{a_1 - a_0}\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{a^4} = \frac{l_1}{a_0^2a_1^2}\cdot\frac{a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2}{3a_0a_1}.$$

Enfin, lorsque la différence $a_1 - a_0$ sera assez petite pour qu'on puisse négliger son carré, la dernière fraction ne différera pas sensiblement de l'unité, et il viendra

$$(25) \qquad Q = \frac{p_0 - p_1 + \rho(U_1 - U_0)}{H} \cdot \frac{I a_0^2 a_1^2}{l_1}.$$

La dépense sera : 1° proportionnelle à la pression; 2° en raison inverse de la longueur du tube; 3° proportionnelle au produit des deux sections normales extrêmes.

§ IX. — *Vérification expérimentale des lois précédentes. Cas où elles cessent d'être applicables.*

Examinons si l'observation confirme nos formules. Pour cela, nous avons les expériences très-précises de M. Poiseuille sur l'écoulement permanent des liquides dans les tubes circulaires, de très-petite section, mouillés par ces liquides [*]. Le tube étant horizontal, M. Poiseuille a reconnu que la dépense est en raison inverse de sa longueur, proportionnelle à la différence des pressions exercées à ses deux extrémités et à la quatrième puissance de son diamètre. Ce sont précisément les lois générales que nous avons obtenues au § IV, et qu'exprime, pour le cas d'un tube circulaire, la formule (19 *bis*). Enfin, la nature du tube ne paraît pas influer sur la dépense, mais seulement celle du liquide [**] : c'est encore conforme à notre théorie, qui n'introduit pas d'autre coefficient que celui de frottement intérieur du liquide.

Navier ne pensait pas que la vitesse fût nulle près d'une paroi mouillée : il la croyait simplement une fonction de la force tangentielle exercée par le liquide sur sa surface. Pour un tube circulaire, son hypothèse donne une dépense qui ne peut pas vérifier à la fois les trois lois de M. Poiseuille [***]. On doit donc adopter la modification

[*] *Voir* aux *Comptes rendus*, séance du 26 décembre 1842, t. XV, p. 1167, où se trouve le Rapport de M. Regnault.

[**] Voir *Physique moléculaire* de M. l'abbé Moigno, p. 35.

[***] En effet, dans ce cas, la vitesse est la même en tous les points d'une même section situés à une même distance r de l'axe du tube. En négligeant l'action de la pesan-

que j'ai introduite, et qui consiste à supposer la vitesse nulle près d'une paroi mouillée [*].

A la température de 10 degrés centigrades, et en prenant la seconde pour unité de temps, le millimètre pour unité de longueur et le milli-

---

teur, et désignant par L la longueur du tube, par P la différence des pressions exercées à ses deux extrémités, l'équation (14) devient

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{P}{HL} = 0.$$

Intégrons, et il viendra

$$r\frac{dV}{dr} + \frac{P}{2HL} r^2 = 0;$$

il ne faut pas de constante, car, pour $r = 0$, le premier membre s'annule.

Intégrons une seconde fois, et désignons par V_1 la vitesse à la paroi. Nous aurons

$$V = \frac{P}{4HL}(R^2 - r^2) + V_1.$$

D'après Navier, V_1 serait une fonction F du frottement, $-H\frac{dV}{dr}$, exercé par le liquide sur sa surface. On aurait donc

$$V = \frac{P}{4HL}(R^2 - r^2) + F\left(\frac{PR}{2L}\right).$$

On en déduit

$$\text{Dépense} = 2\pi \int_0^R V r\, dr = \pi R^2 \left[\frac{PR^2}{8HL} + F\left(\frac{PR}{2L}\right)\right].$$

Pour qu'elle soit proportionnelle au rapport $\frac{P}{L}$, la fonction F doit être du premier degré; mais alors la dépense n'est en raison directe de R^4 que pour $F = 0$ ou $V_1 = 0$: ce qu'il fallait démontrer.

L'hypothèse de Navier sera sans doute exacte si le liquide ne mouille pas le tube. A cause de la petitesse de R, on pourra développer F suivant les puissances ascendantes de sa variable, et ne garder que le terme du premier degré. La dépense sera proportionnelle au rapport $\frac{P}{L}$, et très-sensiblement au cube du rayon.

[*] On vient de me faire remarquer que M. Émile Mathieu avait, dans un article inséré aux *Comptes rendus* (séance du 10 août 1863, t. LVII, p. 320), supposé aussi la vitesse nulle à la paroi d'un tube circulaire ou elliptique, ce qui l'a conduit, comme moi, à des résultats conformes aux expériences de M. Poiseuille. Je suis arrivé, comme on voit, à des résultats plus généraux et plus nombreux.

gramme pour unité de force, les expériences de M. Poiseuille conduisent à poser pour l'eau

$$H = \frac{1}{7488} = 0,000\,1336.$$

(Cette valeur est déduite de la formule de M. Poiseuille

$$Q = 183,783\,\frac{PD^4}{L},$$

où D désigne le diamètre et L la longueur, comparée à la nôtre (19 *bis*)

$$Q = \frac{\pi}{128\,H}\frac{PD^4}{L}.\Big)$$

Si l'unité de longueur devient le mètre, et l'unité de force le kilogramme, la pression H restera la même; car cette pression, équivalant par millimètre carré à 1 milligramme divisé par 7488 ou à 1 kilogramme divisé par 7488000000, vaudra, sur la nouvelle unité de surface, qui est le mètre carré, 1 kilogramme divisé par 7488.

Le coefficient de frottement de l'eau est donc très-petit, et il faudra des variations rapides de vitesse dans un sens transversal aux filets contigus pour lui faire produire un effet sensible. Par exemple, dans le cas d'un canal découvert rempli d'eau, ayant pour section normale un demi-cercle de 1 mètre de rayon, et une pente seulement égale à 0,0001, la formule (17) donnera, pour la vitesse permanente du filet central, en y faisant $L = \frac{\rho g \sin\alpha}{H} = 748,8$ et $b = c = 1$,

$$V = \frac{748,8}{4} = 187^{m},2.$$

Des vitesses très-considérables sont donc nécessaires pour que le frottement fasse équilibre à la pesanteur dans un volume liquide de dimensions finies, lorsque les vitesses u, v, w varient avec continuité d'un point aux points voisins, ainsi que le suppose notre théorie. Or, bien avant que de pareilles vitesses aient pu s'établir, les plus petits tournoiements, produits par les inégalités du fond ou de toute autre manière, doivent amener une perte de force vive capable de neutraliser l'accélération due à la pesanteur ou aux variations de pression.

En d'autres termes, dans un canal découvert ou dans un tuyau de conduite d'un certain calibre, les molécules liquides ne décrivent pas, avec une régularité absolue, la courbe continue qui représente en somme leur trajectoire; mais elles s'en écartent en roulant autour de leurs voisines : ces irrégularités donnent naissance à des résistances spéciales, bien plus considérables que les frottements obtenus en supposant les vitesses continues, et capables de produire un état permanent très-distinct de celui dont nous sommes occupés. Voilà pourquoi le mouvement de l'eau dans les canaux découverts et dans les tuyaux de conduite d'une certaine dimension n'est pas soumis aux lois que nous avons trouvées.

Les résistances ainsi produites ont peut-être une expression très-compliquée. Il est toutefois visible qu'elles doivent diminuer avec la section du tube et tendre vers zéro quand cette section décroît indéfiniment; car alors les écarts des molécules hors de leurs trajectoires moyennes deviennent forcément très-restreints. Aussi voyons-nous ces résistances disparaître en général, et ne plus masquer les forces régulières de frottement, lorsque le tube est capillaire. Des observations faites par M. Darcy lui ont montré que les forces qu'il croyait de viscosité, et qui n'étaient, à mon avis, que les résistances dues aux tournoiements des molécules, grandissaient au contraire avec les dimensions des tuyaux : ce fait, difficile à expliquer autrement, devient très-naturel dans ma manière de le concevoir.

§ X. — *Écoulement permanent des gaz dans des tubes capillaires. — Digression sur la diffusion des gaz.*

Un gaz, contenu dans un réservoir à une pression constante p_0, s'écoule par un long tube capillaire et se rend dans le récipient d'une machine pneumatique, où l'on maintient une très-petite pression p_1. Proposons-nous d'obtenir les lois de son mouvement permanent, en supposant : 1° les coefficients H et K des formules (2) très-petits et sensiblement constants; 2° la vitesse nulle tout près de la paroi du tube.

Nous prendrons, dans une petite étendue, comme au § VIII, un axe

des x parallèle aux génératrices du tube; mais il ne sera pas nécessaire que celui-ci soit étroit au point de rendre la vitesse moyenne très-petite. Il suffira que cette vitesse ne soit pas très-grande. Les composantes v, w seront très-petites par rapport à u, et leurs dérivées en y et z pourront être négligées relativement aux dérivées pareilles de u. Celles-ci auront des valeurs considérables, à cause de la petitesse des coefficients de frottement, tandis que les dérivées de u, v, w en x seront du même ordre que la vitesse et par conséquent finies. D'ailleurs, ρ étant un petit nombre dans tous les gaz naturels, on pourra négliger les composantes ρX, ρY, ρZ de l'action extérieure, et même celles $\rho u'$, $\rho v'$, $\rho w'$ de la force motrice, dès que le mouvement permanent sera établi et que l'accélération sera du même ordre que la vitesse. Les trois équations du mouvement se réduiront donc, comme au § VIII, à la relation (21), où la parenthèse qui termine le premier membre contiendra de moins le terme en ρ, et sera encore une simple fonction de x. La vitesse aura toujours pour formule (22), moins le terme en ρ. La masse M du gaz qui traversera la section dans l'unité de temps vaudra $\int\int \rho u\,dy\,dz$. D'après la loi de Mariotte, la température ne changeant pas, et k désignant une constante, on peut poser

$$\rho = kp.$$

D'ailleurs p varie très-peu sur toute l'étendue d'une même section normale du tube. Nous aurons donc, au lieu de (23),

$$(26)\qquad M = -\frac{1}{H}\frac{d\frac{kp^2}{2}}{dx}\,I a^4.$$

Elle se déduirait de (23), en faisant $\rho = 0$, et en changeant Q en M et p en $\frac{kp^2}{2}$. On en tirera donc deux équations semblables à (24):

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{kp^2}{2} &= -\frac{kp_0^2}{2} + HM\int_0^l \frac{dl}{Ia^4},\\ M &= \frac{k(p_0^2 - p_1^2)}{2H\int_0^{l_1}\frac{dl}{Ia^4}}.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier d'un tube légèrement conique, cette dernière formule devient, pareillement à (25),

$$M = \frac{k(p_0^2 - p_1^2)}{2H} \frac{I a_0^2 a_1^2}{l_1}. \qquad (28)$$

La masse du gaz qui s'écoule dans l'unité de temps est : 1° en raison directe de la différence des carrés des pressions exercées aux deux extrémités du tube; 2° en raison inverse de la longueur; 3° proportionnelle au produit des deux sections normales extrêmes.

M. Graham a trouvé expérimentalement les deux premières lois [*]. Il a reconnu aussi que la vitesse, toutes choses égales d'ailleurs, varie avec la nature du gaz, mais non avec celle du tube : ce qui est bien conforme à nos formules, et n'aurait pas lieu si la condition relative à la surface n'était pas la même pour toutes les parois. Enfin il a trouvé que la vitesse diminuait avec la température, ce qui prouve que H augmente avec elle, contrairement à ce qui a lieu pour beaucoup de liquides.

Les expériences de M. Poiseuille et de M. Graham, ayant été faites dans des limites de pression étendues, et se trouvant d'accord avec l'hypothèse H = constante, prouvent que les coefficients de frottement ne varient pas beaucoup avec la pression.

On sait que M. Graham a fait encore de nombreuses recherches sur la diffusion des fluides, et qu'il est arrivé à cette loi remarquable : *Lorsqu'un gaz traverse une paroi poreuse, sa vitesse est en raison inverse de la racine carrée de sa densité* (voir *Physique moléculaire* de M. l'abbé Moigno, p. 111). Elle peut être obtenue théoriquement au moyen des considérations suivantes.

Concevons un gaz en repos, dans un milieu solide poreux sans action chimique sur lui : on doit naturellement penser, par analogie à ce qui arrive lors du mélange des fluides élastiques, qu'il se comportera comme s'il était seul, c'est-à-dire qu'il sera soumis dans tous les sens à une pression correspondante à sa densité d'après la loi de Mariotte. Mais s'il entre en mouvement, une résistance spéciale se développera

---

[*] Voir *Physique moléculaire*, de M. l'abbé Moigno, p. 117.

entre le milieu poreux et lui; rapportée à l'unité de masse du gaz, cette résistance devra être proportionnelle : 1° à la vitesse u, ou au nombre des molécules du milieu poreux qui s'opposent, dans l'unité de temps, au mouvement du gaz; 2° à une certaine fonction de la vitesse, $f(u)$, s'annulant pour $u = 0$, et représentant proportionnellement la résistance due à chaque molécule de milieu poreux.

Supposons actuellement que le milieu poreux soit une plaque ou une membrane à faces parallèles, d'épaisseur E, à travers laquelle passe un gaz soumis respectivement à deux pressions constantes p_0, p_1, à l'entrée et à la sortie. Si la plaque est composée de couches infiniment minces, parallèles à ses faces, et dont chacune soit homogène dans toute son étendue, le mouvement aura lieu perpendiculairement aux faces; p désignant la pression et ρ la densité en chaque point, x une coordonnée comptée à partir de la face d'entrée dans le sens du mouvement, la première équation de l'hydrodynamique donnera

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -uf(u) - u\frac{du}{dx}.$$

Admettons que la vitesse soit assez peu considérable pour que $f(u)$ puisse être développée par la série de Maclaurin limitée au terme du premier degré : $f(u)$ sera ainsi remplacée par Cu, C désignant un coefficient de résistance qui varie avec la nature des couches, et qui sera par conséquent une fonction déterminée de x. De plus, D étant un autre coefficient dépendant du gaz, et $\varphi(p)$ une certaine fonction, qui, d'après la loi de Mariotte, n'est autre que p, mais que nous supposerons seulement la même pour tous les gaz, nous pourrons poser

$$(\beta) \qquad \rho = D\varphi(p).$$

Enfin, si nous appelons ρ_0 et u_0 la densité et la vitesse au départ, la condition de continuité sera

$$(\gamma) \qquad \rho u = \rho_0 u_0 \quad \text{ou} \quad u\varphi(p) = u_0\varphi(p_0).$$

On peut de (β) et (γ) tirer les valeurs de ρ et u, pour les porter

dans (α). Cette équation devient alors intégrable, et donne

$$(\delta) \qquad u_0^2 \varphi(p_0) = \frac{\dfrac{1}{D\varphi(p_0)} \displaystyle\int_p^{p_0} \varphi(p)\, dp}{\displaystyle\int_0^x C\, dx + \log \frac{\varphi(p_0)}{\varphi(p)}}.$$

Faisons $x = E$, $p = p_1$, et multiplions les deux membres par D : il viendra

$$(\varepsilon) \qquad \rho_0 u_0^2 = \frac{\dfrac{1}{\varphi(p_0)} \displaystyle\int_{p_1}^{p_0} \varphi(p)\, dp}{\displaystyle\int_0^E C\, dx + \log \frac{\varphi(p_0)}{\varphi(p_1)}}.$$

Le second membre ne dépend que de C, E, p_0, p_1; il ne varie pas avec la nature du gaz. Donc le produit $\rho_0 u_0^2$ est constant pour tous les gaz soumis aux deux mêmes pressions p_0, p_1, à l'entrée et à la sortie de la plaque; c'est-à-dire que la vitesse de diffusion est bien en raison inverse de la racine carrée de la densité.

Il se peut que plusieurs gaz traversent à la fois la plaque ou la membrane, les uns dans un sens et les autres en sens contraire. Il est probable que les actions qu'ils exerceront les uns sur les autres seront, à cause de leurs faibles densités, très-petites par rapport à la résistance exercée sur eux par le milieu poreux. L'équation (α) sera donc sensiblement vérifiée pour chacun d'eux, qui se comportera comme si les autres n'y étaient pas.

§ XI. — *Mouvement permanent d'un liquide par filets horizontaux circulaires et conaxiques.*

Après le mouvement permanent d'un liquide par filets rectilignes et parallèles, le plus simple est celui qui se fait par filets circulaires horizontaux, ayant tous leurs centres sur une même verticale.

Nous prendrons pour axe des z cette verticale dirigée en haut, et pour axes des x et des y deux horizontales rectangulaires. Si r désigne la distance $\sqrt{x^2+y^2}$ d'un point quelconque à l'axe des z, les composantes u, v, w de la vitesse V de la molécule qui passe en (x, y, z) à un instant quelconque, seront

$$(29) \qquad u = V\frac{-y}{r}, \quad v = V\frac{x}{r}, \quad w = 0.$$

D'ailleurs, à cause de l'incompressibilité du fluide, la vitesse sera constante tout le long d'un même filet liquide, ce qui revient à dire que V est seulement fonction de r et z. En calculant les expressions $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$, $\Delta_2 w$, on trouve aisément :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_2 u = \frac{-y}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right), \quad \Delta_2 v = \frac{x}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right), \quad \Delta_2 w = 0, \\ &\text{avec}\quad \Delta_2 \mathrm{V} = \frac{d^2\mathrm{V}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2}. \end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs dans les trois équations du mouvement

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{dp}{dx} + \mathrm{H}\,\Delta_2 u = \rho\left(u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy}\right), \\ &-\frac{dp}{dy} + \mathrm{H}\,\Delta_2 v = \rho\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy}\right), \\ &-\frac{dp}{dz} - \rho g = 0; \end{aligned}\right.$$

et, de plus, évaluons, d'après (29), les seconds nombres de ces dernières. Il viendra

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{dx} = \mathrm{H}\frac{-y}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + \rho\frac{\mathrm{V}^2}{r}\frac{x}{r}, \\ &\frac{dp}{dy} = \mathrm{H}\frac{x}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + \rho\frac{\mathrm{V}^2}{r}\frac{y}{r}, \\ &\frac{dp}{dz} = -\rho g. \end{aligned}\right.$$

Tirons en différentiant, de la première de ces équations, les valeurs de $\frac{d^2p}{dz\,dx}$, $\frac{d^2p}{dx\,dy}$, de la deuxième celles de $\frac{d^2p}{dx\,dy}$, $\frac{d^2p}{dy\,dz}$, et de la troisième celles de $\frac{d^2p}{dy\,dz}$, $\frac{d^2p}{dz\,dx}$; puis égalons deux à deux ces dérivées secondes. Nous aurons les trois conditions d'intégrabilité

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{H}\frac{-y}{r}\frac{d}{dz}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + 2\rho\frac{\mathrm{V}x}{r^2}\frac{d\mathrm{V}}{dz} = 0, \\ &\mathrm{H}\frac{x}{r}\frac{d}{dz}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + 2\rho\frac{\mathrm{V}y}{r^2}\frac{d\mathrm{V}}{dz} = 0, \\ &\frac{1}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + \frac{d}{dr}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières, respectivement multipliées par $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et ajoutées, donnent

$$(34)\qquad \frac{dV}{dz} = 0,$$

condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient satisfaites. Cette relation entraîne une conséquence remarquable, savoir : que *la section normale du fluide doit être l'espace, illimité inférieurement, compris entre deux droites verticales*. Car, si les diverses verticales prises dans le fluide et suffisamment prolongées rencontraient un fond, on y aurait $V = 0$ d'après la condition relative à toute paroi mouillée : par suite la vitesse V serait nulle partout. Il est clair qu'on arriverait au même résultat $V = 0$, si la condition à la surface était celle de Navier, c'est-à-dire de la forme $\frac{dV}{dz} = h_1 V + h_2 V^2 + \ldots$.

La troisième condition (33), intégrée, donne à son tour, en désignant par c une constante,

$$(35)\qquad \Delta_2 V - \frac{V}{r^2} = \frac{-c}{r}.$$

Celle ci a elle-même pour intégrale générale

$$(36)\qquad V = \frac{c}{2}\left[-r\log\frac{r}{A} + \frac{B}{r}\right],$$

où A et B sont les deux constantes arbitraires.

Appelons r_0, r_1 les distances à l'axe des z des deux verticales qui limitent une section normale du fluide. La condition $V = 0$ sur la paroi nous donnera, pour déterminer A et B, les deux équations du premier degré

$$r_0 \log A + \frac{1}{r_0} B = r_0 \log r_0, \quad r_1 \log A + \frac{1}{r_1} B = r_1 \log r_1.$$

Après quelques simplifications faciles, on trouve

$$(37)\qquad V = \frac{cr}{2}\left[\frac{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}{1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}}\log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0}\right].$$

La signification de la constante c est facile à obtenir. Les deux premières équations (32), respectivement multipliées par $\frac{-y}{r}$, $\frac{x}{r}$ et ajoutées, donnent

$$\frac{dp}{dx}\frac{-y}{r} + \frac{dp}{dy}\frac{x}{r} = -\mathrm{H}\frac{c}{r}. \tag{38}$$

Le premier membre de celle-ci est la dérivée de p le long de la tangente au filet liquide. Considérons deux sections normales du fluide, inclinées l'une sur l'autre d'un angle $d\alpha$: $rd\alpha$ sera l'élément du filet compris entre les deux sections, et, si dp désigne l'accroissement de pression que subit le filet de l'une à l'autre, la dérivée de p le long de cet élément sera $\frac{1}{r}\frac{dp}{d\alpha}$. La relation ci-dessus pourra s'écrire

$$c = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{-dp}{d\alpha}. \tag{39}$$

On pourra remplacer c par cette valeur dans l'expression (37) de la vitesse : pour que celle-ci soit positive, il faudra que $\frac{dp}{d\alpha}$ soit négatif, comme il était évident.

Le rapport $\frac{dp}{d\alpha}$ est donc constant : d'où il résulte qu'aux points correspondants de deux sections normales, les pressions ne diffèrent que par une constante, proportionnelle à l'angle α.

Il ne reste plus qu'à trouver comment varie la pression aux divers points d'une même section normale. Multiplions les deux premières des équations (32), respectivement par $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, et ajoutons. Il viendra

$$\frac{dp}{dr} = \rho\frac{\mathrm{V}^2}{r}. \tag{40}$$

D'où, dans l'étendue d'une même section,

$$p = \text{const} + \rho\left(-gz + \int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{V}^2}{r}\,dr\right),$$

et, en général,

$$p = \text{const} + \rho\left(-\frac{\mathrm{H}}{\rho}c\alpha - gz + \int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{V}^2}{r}\,dr\right), \tag{41}$$

où V doit être remplacé par sa valeur (36).

Évaluons la dérivée de V par rapport à r, dérivée qui mesure le glissement relatif de deux couches cylindriques infiniment voisines. La formule (37) la donne :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{2}\left[\frac{1+\frac{r_0^2}{r^2}}{1-\frac{r_0^2}{r_1^2}}\log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0} - 1\right]. \tag{42}$$

Cette dérivée décroît, dans chacun de ses termes variables, quand r grandit : or nous verrons bientôt qu'elle est positive pour $r = r_0$ et négative pour $r = r_1$; donc elle ne s'annule qu'une fois, pour une valeur de r comprise entre r_0 et r_1 : V, nul pour $r = r_0$ et pour $r = r_1$, croît avec r jusqu'à ce que r soit égal à cette valeur intermédiaire, et décroît ensuite.

Les valeurs de la dérivée pour $r = r_0$ et $r = r_1$ sont d'après (42), en changeant le signe de la dernière, et posant

$$\frac{r_0^2}{r_1^2} = q = 1 - \varepsilon, \tag{43}$$

$$(44)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dV}{dr}\right)_0 = \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{-\log q}{1-q} - 1\right) = \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon^2}{3} + \dfrac{\varepsilon^3}{4} + \ldots\right), \\ -\left(\dfrac{dV}{dr}\right)_1 = \dfrac{c}{2}\left(1 + \dfrac{q\log q}{1-q}\right) = \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon^2}{2.3} + \dfrac{\varepsilon^3}{3.4} + \ldots\right). \end{cases}$$

Les actions tangentielles exercées par le fluide sur les deux parois sont respectivement égales à H, multiplié par $\left(\frac{dV}{dr}\right)_0$ ou par $-\left(\frac{dV}{dr}\right)_1$. La première est plus grande que la seconde : donc la berge concave ou extérieure est soumise à un frottement moins considérable que la berge convexe.

Ce dernier résultat pourrait n'être plus vrai, si la condition relative aux parois cessait d'être $V = 0$. Admettons que cette condition soit généralement celle de Navier, c'est-à-dire de la forme

$$\text{pour}\quad r = r_0,\qquad \frac{dV}{dr} = h_1 V + h_2 V^2 + \ldots;$$

$$\text{pour}\quad r = r_1,\quad -\frac{dV}{dr} = h_1 V + h_2 V^2 + \ldots.$$

Notre hypothèse $V = 0$ à la paroi n'en est qu'un cas particulier, celui où les coefficients h_1, h_2,... seraient infinis. Examinons le cas particulier contraire, celui où ces coefficients seraient très-petits.

Alors on aurait sensiblement aux deux parois,

$$\text{non plus} \quad V = 0, \quad \text{mais} \quad \frac{dV}{dr} = 0.$$

Toute notre analyse subsistera, sauf la formule (37) et ses conséquences. Pour déterminer les constantes A et B de l'intégrale (36), nous aurons les deux relations

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dV}{dr}\right)_1 = 0,$$

ou

$$-1 - \log\frac{r_0}{A} - \frac{B}{r_0^2} = 0, \quad -1 - \log\frac{r_1}{A} - \frac{B}{r_1^2} = 0,$$

qui donnent

$$B = \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}, \quad \log A = 1 + \log r_0 + \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0},$$

et, par suite,

$$V = \frac{cr}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0}\right],$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{r_1^2 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0}\right],$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{c}{2r^3}\left(\frac{r_1^2 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1^2}{r_0^2} - r^2\right) = \frac{cr_0^2}{2r^3}\left(\frac{-\log q}{1-q} - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Il est clair que cette dernière dérivée, d'abord positive pour r assez petit, s'annule une fois et ne cesse pas ensuite d'être négative. La valeur de r qui l'annule est comprise entre r_0 et r_1. En effet, on a

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_0 = \frac{c}{2r_0}\left(\frac{-\log q}{1-q} - 1\right) = \frac{c}{2r_0}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots\right),$$

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_1 = -\frac{c}{2r_1}\left(1 + \frac{q\log q}{1-q}\right) = -\frac{c}{2r_1}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2.3} + \ldots\right).$$

Donc la dérivée première de V par rapport à r part de zéro pour

$r = r_0$, croît jusqu'à cette valeur intermédiaire de r, décroît ensuite et s'annule pour $r = r_1$: elle est constamment positive, ou plutôt, à cause de h_1, h_2,... très-petits, et non pas rigoureusement nuls, elle ne devient négative qu'au moment où r va devenir égal à r_1. Par suite, la vitesse croît sans cesse avec r : elle a sa valeur la plus petite pour $r = r_0$, et sa valeur la plus grande pour $r = r_1$. Ces deux valeurs sont

$$V_0 = \frac{cr_0}{2}\left(\frac{-\log q}{1-q} + 1\right) = cr_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots\right)\right],$$
$$V_1 = \frac{cr_1}{2}\left(1 + \frac{-q\log q}{1-q}\right) = cr_1\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2.3} + \ldots\right)\right].$$

La berge concave est donc, contrairement à ce qui arrivait lors de la condition $V = 0$ à la paroi, soumise à un frottement plus grand que la berge convexe. Seulement ces deux frottements sont du même ordre de grandeur, et leur différence ne peut pas sans doute expliquer, d'une part, les dégradations que l'eau produit sur la première berge aux tournants des rivières, et, d'autre part, les atterrissements qu'elle forme sur la seconde. La vraie cause de ce phénomène est probablement celle indiquée à la fin de l'Introduction de ce Mémoire.

Le cas général où les coefficients h_1, h_2,... ne seraient ni nuls, ni infinis, conduirait naturellement à des résultats intermédiaires. Je l'ai traité en supposant la vitesse assez petite pour qu'on puisse négliger les termes de l'ordre de V^2. Mais les formules me paraissent trop compliquées pour qu'il en résulte quelque loi intéressante.

§ XII. — *Essai sur le mouvement permanent d'un liquide dans un canal horizontal à axe circulaire.*

Nous avons démontré que le mouvement permanent d'un liquide peut se faire par filets circulaires et conaxiques dans le cas seulement où il n'y a ni fond, ni couvercle. Cherchons actuellement ce qui arrivera si le canal horizontal, à axe circulaire, a une section normale finie en tous sens et d'ailleurs constante.

Adoptons les mêmes axes qu'au paragraphe précédent, et décomposons en trois autres la vitesse du fluide en un point quelconque

(x, y, z) : la première composante V, la seule qui existât au paragraphe précédent, sera prise parallèle à l'axe du canal ; la deuxième V', horizontale comme la première, sera dirigée suivant le prolongement du rayon r ; enfin la troisième, verticale, n'est autre que w. La composante V fait avec les axes des angles qui ont pour cosinus $\frac{-y}{r}$, $\frac{x}{r}$, o, et la composante V' des angles qui ont pour cosinus $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, o. On aura donc

$$(29\ bis) \qquad u = V\frac{-y}{r} + V'\frac{x}{r}, \quad v = V\frac{x}{r} + V'\frac{y}{r}.$$

Le mouvement permanent étant supposé établi, et toutes les sections normales du canal se trouvant dans les mêmes conditions, nous admettrons que les vitesses V, V' sont les mêmes aux points correspondants des diverses sections normales, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de r et de z. Les formules (30) permettront d'écrire sans nouveau calcul :

$$(30\ bis) \quad \begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{-y}{r}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) + \dfrac{x}{r}\left(\Delta_2 V' - \dfrac{V'}{r^2}\right), \\ \Delta_2 v = \dfrac{x}{r}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) + \dfrac{y}{r}\left(\Delta_2 V' - \dfrac{V'}{r^2}\right), \\ \Delta_2 w = \dfrac{d^2 w}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr} + \dfrac{d^2 w}{dz^2}, \\ \text{avec} \\ \Delta_2 V = \dfrac{d^2 V}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{dr} + \dfrac{d^2 V}{dz^2}, \\ \Delta_2 V' = \dfrac{d^2 V'}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dV'}{dr} + \dfrac{d^2 V'}{dz^2}. \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans les trois équations du mouvement

$$(31\ bis) \quad \begin{cases} -\dfrac{dp}{dx} + H\Delta_2 u = \rho\left(u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{du}{dy} + w\dfrac{du}{dz}\right), \\ -\dfrac{dp}{dy} + H\Delta_2 v = \rho\left(u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{dv}{dy} + w\dfrac{dv}{dz}\right), \\ -\dfrac{dp}{dz} + H\Delta_2 w - \rho g = \rho\left(u\dfrac{dw}{dx} + v\dfrac{dw}{dy} + w\dfrac{dw}{dz}\right); \end{cases}$$

de plus, tirons, des formules (29 *bis*), les seconds nombres de ces dernières. Il viendra

$$(32\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= \mathrm{H}\left[\frac{-y}{r}\left(\Delta_2\mathrm{V}-\frac{\mathrm{V}}{r^2}\right)+\frac{x}{r}\left(\Delta_2\mathrm{V}'-\frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right)\right]\\
&\quad-\rho\left[-\frac{x}{r}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r}-\mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right)+\frac{-y}{r}\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}+\frac{\mathrm{V}}{r}\right)\right.\\
&\qquad\left.+w\left(\frac{-y}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dz}+\frac{x}{r}\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right)\right],\\
\frac{dp}{dy} &= \mathrm{H}\left[\frac{x}{r}\left(\Delta_2\mathrm{V}-\frac{\mathrm{V}}{r^2}\right)+\frac{y}{r}\left(\Delta_2\mathrm{V}'-\frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right)\right]\\
&\quad-\rho\left[-\frac{y}{r}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r}-\mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right)+\frac{x}{r}\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}+\frac{\mathrm{V}}{r}\right)\right.\\
&\qquad\left.+w\left(\frac{x}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dz}+\frac{y}{r}\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right)\right],\\
\frac{dp}{dz} &= \mathrm{H}\Delta_2 w-\rho\left(\mathrm{V}'\frac{dw}{dr}+w\frac{dw}{dz}\right)-\rho g.
\end{aligned}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité pour la fonction p, obtenues en différentiant ces relations, sont

$$(33\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{x}{r}\frac{d}{dr}\left[\mathrm{H}\Delta_2 w-\rho\left(\mathrm{V}'\frac{dw}{dr}+w\frac{dw}{dz}\right)\right]\\
&\quad=\frac{-y}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2\mathrm{V}-\frac{\mathrm{V}}{r^2}\right)-\rho\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}+\frac{\mathrm{V}}{r}\right)-\rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right]\\
&\qquad+\frac{x}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2\mathrm{V}'-\frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right)+\rho\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r}-\mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right)-\rho w\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right],\\
&\frac{y}{r}\frac{d}{dr}\left[\mathrm{H}\Delta_2 w-\rho\left(\mathrm{V}'\frac{dw}{dr}+w\frac{dw}{dz}\right)\right]\\
&\quad=\frac{x}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2\mathrm{V}-\frac{\mathrm{V}}{r^2}\right)-\rho\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}+\frac{\mathrm{V}}{r}\right)-\rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right]\\
&\qquad+\frac{y}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2\mathrm{V}'-\frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right)+\rho\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r}-\mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right)-\rho w\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right],\\
&\frac{d}{dr}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2\mathrm{V}-\frac{\mathrm{V}}{r^2}\right)-\rho\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}+\frac{\mathrm{V}}{r}\right)-\rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right]\\
&\qquad+\frac{1}{r}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2\mathrm{V}-\frac{\mathrm{V}}{r^2}\right)-\rho\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr}+\frac{\mathrm{V}}{r}\right)-\rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right]=0.
\end{aligned}\right.$$

Les deux premières, respectivement multipliées par $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et ajoutées,

puis par $\frac{-y}{r}, \frac{x}{r}$ et ajoutées, se changent en

$$(34\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left[\mathrm{H}\Delta_2 w - \rho\left(\mathrm{V}'\dfrac{dw}{dr} + w\dfrac{dw}{dz}\right)\right] \\ \quad = \dfrac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V}' - \dfrac{\mathrm{V}'}{r^2}\right) + \rho\left(\dfrac{\mathrm{V}^2}{r} - \mathrm{V}'\dfrac{d\mathrm{V}'}{dr}\right) - \rho w\dfrac{d\mathrm{V}'}{dz}\right], \\ \dfrac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \dfrac{\mathrm{V}}{r^2}\right) - \rho \mathrm{V}'\left(\dfrac{d\mathrm{V}}{dr} + \dfrac{\mathrm{V}}{r}\right) - \rho w \dfrac{d\mathrm{V}}{dz}\right] = 0. \end{cases}$$

La troisième (33 *bis*), intégrée en même temps que la dernière de celles-ci, donne, en désignant par c une constante,

$$(35\ bis)\quad \mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) - \rho \mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{\mathrm{V}}{r}\right) - \rho w \frac{d\mathrm{V}}{dz} = \frac{-c}{r}.$$

La signification de la constante c s'obtiendra comme au paragraphe précédent (38) et (39). Elle n'est autre, changée de signe, que le quotient par H de la dérivée de la pression, quand on passe d'un point quelconque d'une section normale au point correspondant de la section infiniment voisine, inclinée sur la première d'un angle $d\alpha$: cette dérivée $\frac{dp}{d\alpha}$ est donc constante, comme si le mouvement se faisait par filets circulaires et conaxiques.

Les trois équations indéfinies qui serviront à déterminer V, V′, w en fonction de r et de z sont donc : la première (34 *bis*), la relation (35 *bis*), et la condition de continuité (4), qui devient ici

$$(45)\qquad \frac{d\mathrm{V}'}{dr} + \frac{\mathrm{V}'}{r} + \frac{dw}{dz} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dr\mathrm{V}'}{dr} + \frac{dr\mathrm{V}'}{dz} = 0.$$

Ces trois équations sont facilement intégrables, quand le canal est un tube qui a pour section normale un rectangle à base horizontale et d'une hauteur $2h$ très-petite.

Supposons le plan des xy à mi-hauteur de la section. D'après les conditions $\mathrm{V} = 0$, $\mathrm{V}' = 0$, $w = 0$ à la paroi, V devra s'annuler pour $z = +h$ et pour $z = -h$: elle sera donc de l'ordre de petitesse de h^2. V′ devra s'annuler au moins une fois de plus, pour une valeur de z comprise entre $z = -h$, $z = h$: on doit avoir en effet

$$(46)\qquad \int_{-h}^{h} \mathrm{V}'dz = 0;$$

car, si l'on considère le liquide contenu entre le bord convexe du tube, deux sections normales infiniment voisines, et un plan vertical quelconque mené dans le fluide perpendiculairement à ces sections, il faut que le liquide qui entre par une partie de cette face verticale soit égal à celui qui sort par l'autre partie de la même face, puisqu'il en entre autant par la première section normale qu'il en sort par la seconde. Ainsi V change de signe quand z va de $-h$ à h, et est au plus de l'ordre de h^3. Les dérivées de V et V' par rapport à r seront évidemment du même ordre que V et V', pour tous les points situés à une distance finie des bords verticaux du tube, tandis que leurs dérivées premières en z seront incomparablement plus grandes, et leurs dérivées secondes encore plus.

Quant à la composante w, l'équation (45) montre que sa dérivée première en z est de l'ordre de V', et qu'elle est par conséquent ellemême de l'ordre de $V'h$. En négligeant d'après ces remarques, dans l'équation (35 *bis*) et dans la première (34 *bis*), les termes qui sont très-petits par rapport à d'autres, on les changera en

$$H\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-c}{r},\quad \frac{d}{dz}\left(H\frac{d^2V'}{dz^2} + \rho\frac{V^2}{r}\right) = 0.$$

La première donne d'abord, en tenant compte des conditions $V = 0$ pour $z = \pm h$,

$$(47)\qquad V = \frac{ch^2}{2Hr}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right).$$

Cette valeur de V, portée dans la seconde, permet de l'intégrer. En tenant compte des conditions $V' = 0$ pour $z = \pm h$, et désignant par A une fonction de r, il vient

$$V' = \frac{\rho c^2 h^6}{8H^3r^3}\left[A\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z^4}{h^4}\right) + \frac{1}{15}\left(1 - \frac{z^6}{h^6}\right)\right].$$

Multiplions par dz et intégrons entre les limites $z = -h$ et $z = +h$. La condition (46) donnera $A = \frac{11}{35}$. Ensuite l'équation (45) sera devenue elle-même intégrable en z, et, avec les conditions $w = 0$ à la paroi, déterminera complétement w. Une décomposition facile en fac-

teurs permettra finalement d'obtenir

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} V' &= \frac{\rho c^2 h^6}{120\,H^3 r^3}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)\left(2 + \sqrt{\frac{23}{7}} - \frac{z^2}{h^2}\right)\left(2 - \sqrt{\frac{23}{7}} - \frac{z^2}{h^2}\right), \\ w &= \frac{2}{7}\,\frac{\rho c^2 h^7}{120\,H^3 r^4}\,\frac{z}{h}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5 - \frac{z^2}{h^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs ne sont évidemment pas applicables aux points situés très-près des deux bords verticaux du tube.

V' étant une fonction paire de z, et w une fonction impaire, les phénomènes se passent symétriquement au-dessus et au-dessous du plan des xy : il suffit d'examiner ce qui a lieu au-dessus.

V' est positif de $z = 0$ à $z = h\sqrt{2 - \sqrt{\frac{23}{7}}} = 0,431h$; au delà V' est négatif. Donc les molécules situées vers la partie moyenne du tube, entre les valeurs $z = 0$ et $z = 0,431h$, c'est-à-dire celles qui, d'après (47), sont animées de la plus grande vitesse, vont à la dérive en s'approchant du bord concave ou extérieur du tube; celles qui sont plus près de la paroi supérieure s'approchent au contraire du bord convexe ou intérieur. Il y a deux maximums pour la valeur absolue de V' : l'un correspond à $z = 0$, l'autre à $z = h\sqrt{\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{76}{63}}} = 0,754h$. Abstraction faite du facteur $\frac{\rho c^2 h^6}{120\,H^3 r^3}$, ces deux maximums sont respectivement 2,856 et 2,144.

w est partout positif pour $z > 0$: donc les molécules montent. Celles qui, sur une même verticale, ont le plus de vitesse ascendante, correspondent à $\frac{dw}{dz} = 0$ ou $V' = 0$, c'est-à-dire à la valeur $0,431h$ de z, pour laquelle les molécules cessent d'aller vers le bord concave du tube pour revenir vers le bord convexe. La vitesse ascendante n'est nulle que pour les molécules situées sur le plan des xy, et pour celles qui adhèrent aux parois [*].

---

[*] Il est clair que les molécules liquides, après être venues, en montant, près du bord convexe du tube, descendent pour faire place à celles qui les suivent : mais nos formules ne s'appliquent pas à cette partie de leur mouvement.

Si dr et dz sont les accroissements simultanés que reçoivent, durant l'instant dt, le r et le z d'une molécule, il est clair qu'on aura

$$\frac{dr}{V'} = \frac{dz}{w},$$

ou bien, à cause de $V' = \frac{r}{2}\frac{dw}{dz}$,

$$2\frac{dr}{r} = \frac{d\left[\frac{z}{h}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5-\frac{z^2}{h^2}\right)\right]}{\frac{z}{h}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5-\frac{z^2}{h^2}\right)},$$

dont l'intégrale est

$$(49) \qquad r^2 = \text{const.} \times \frac{z}{h}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5-\frac{z^2}{h^2}\right), \quad \text{ou} \quad r^2 w = \text{const.}$$

Ainsi la vitesse ascendante de chaque molécule varie, durant son mouvement, en raison inverse de la racine carrée de sa distance à l'axe des z : elle est le plus petite possible au moment où la molécule se retourne vers le bord convexe. La relation (49) montre que les molécules ne vont pas jusqu'à la paroi supérieure, car l'hypothèse $z = h$ donne $r = 0$, valeur inadmissible.

Le temps qu'elles emploient à s'élever d'un niveau z_0 à leur niveau actuel z s'obtiendrait aisément, en remplaçant, dans la seconde relation (48), r^2 par sa valeur (49), w par $\frac{dz}{dt}$, puis résolvant par rapport à dt, et intégrant de z_0 à z.

Il nous est actuellement facile de nous représenter l'ensemble du mouvement. *En même temps que le liquide avance dans le tube avec la vitesse* V (47), *il est animé d'un mouvement transversal beaucoup plus lent, qui le transforme en deux tourbillons, l'un supérieur, l'autre inférieur, séparés par le plan des xy. Les deux tourbillons sont symétriques par rapport à ce plan. Dans chacun d'eux, les molécules les plus éloignées de la paroi, c'est-à-dire celles qui ont la plus grande vitesse, se rapprochent du bord concave tout en s'éloignant petit à petit du plan des xy. Arrivées à la distance* 0,431h *de ce plan, elles reviennent vers*

le bord convexe, et continuent d'ailleurs à s'écarter du plan des xy, et à perdre leur vitesse. Il est évident qu'après s'être suffisamment approchées du bord convexe, elles repassent dans les régions moyennes où la vitesse est plus grande, et recommencent un trajet pareil. Mais nos formules ne s'appliquent plus à cette partie du mouvement, tout comme elles peuvent ne pas s'appliquer à la totalité de la première partie : elles n'ont été établies que pour les points situés à une distance finie des bords latéraux.

A cause de la petitesse de V' et de w, la pression est à très-peu près donnée par la formule (41).

Si l'on supprime toute la partie du fluide qui est au-dessus du plan des xy, et qu'on la remplace par une atmosphère exerçant sur chaque élément de ce plan la même pression qu'elle, rien ne sera changé au mouvement de la partie inférieure. En effet, les formules (47), (48) et (29 *bis*) donneront à la surface libre, ou pour $z = 0$,

$$\frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0,$$

et par suite, d'après les formules (2),

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0,$$

c'est-à-dire que les conditions relatives à la surface libre seront bien vérifiées.

Il n'y a par conséquent, dans un canal découvert à axe circulaire, qu'un seul tourbillon, analogue au tourbillon inférieur d'un tube de section deux fois plus haute.

Nous avons admis l'hypothèse $u = 0$, $v = 0$ aux deux parois supérieure et inférieure. Si l'on y supposait au contraire le frottement nul, les relations spéciales à ces surfaces seraient

$$w = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0.$$

On satisfait à ces conditions, ainsi qu'aux équations indéfinies, en faisant partout

$$\frac{dV}{dz} = 0, \quad V' = 0, \quad w = 0.$$

L'écoulement aurait donc lieu par filets circulaires et conaxiques, c'est-à-dire qu'il n'y aurait aucun mouvement transversal.

Il est clair que l'hypothèse intermédiaire d'un frottement sensible aux parois supérieure et inférieure, mais pas assez grand pour y annuler les vitesses, donnerait des mouvements transversaux pareils à ceux que nous avons obtenus, mais moins rapides par rapport au mouvement longitudinal.

Note I (relative au § I, p. 381).

Pour obtenir les formules (2), p. 381, on observera :

1° Que, si l'on change simplement le sens de l'axe des x par les transformations de x en $-x$, et de u en $-u$, les formules des N, T seront les mêmes dans le nouveau système d'axes que dans le premier. Or la nouvelle force N_1 sera celle qui est exercée sur le même élément parallèle aux yz, mais du côté des x d'abord négatifs : elle sera égale à la force de même nom dans le premier système. On verra pareillement que les forces N_2, N_3, T_1 restent les mêmes, et que T_2, T_3 changent de signe. Donc les transformations simultanées de x en $-x$ et de u en $-u$ doivent laisser invariables N_1, N_2, N_3, T_1, et faire changer de signe T_2 et T_3.

De même les transformations simultanées de y en $-y$ et de v en $-v$ doivent laisser invariables N_2. N_3, N_1, T_2, et changer de signe T_3, T_1. Enfin les changements de z en $-z$ et de w en $-w$ ne changent pas N_3, N_1, N_2, T_3, et transforment T_1, T_2 en $-T_1$, $-T_2$. Il suit de là que l'expression de N_1 se réduit à une constante, suivie de trois termes en $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, et que celle de T_1 contient seulement les deux termes en $\frac{dv}{dz}$, $\frac{dw}{dy}$. D'ailleurs, comme on peut permuter les deux axes des y et des z sans changer les formules, $\frac{dv}{dy}$ et $\frac{dw}{dz}$ auront un coefficient égal dans N_1, et il en sera de même de $\frac{dv}{dz}$ et $\frac{dw}{dy}$ dans T_1. Nous obtiendrons ainsi les formules (2) de N_1, T_1, dans lesquelles seulement nous n'aurons pas encore le droit de regarder les deux coefficients H comme égaux.

Les formules (2) de N_2 et N_3, T_2 et T_3, se déduiront évidemment de celles de N_1 et T_1.

2° Que, si l'on fait tourner d'un angle infiniment petit ι, autour de l'axe des z, le système des deux autres axes, les formules des N, T dans le nouveau système seront les mêmes que dans le premier. Appelons : x_1, y_1, z_1 les nouvelles coordonnées du point (x, y, z); u_1, v_1, w_1 les composantes, suivant les nouveaux axes, de la vitesse (u, v, w). Nous aurons les formules de transformation

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d}{dx} = \dfrac{d}{dx_1} - \iota\dfrac{d}{dy_1}, & \dfrac{d}{dy} = \dfrac{d}{dy_1} + \iota\dfrac{d}{dx_1}, & \dfrac{d}{dz} = \dfrac{d}{dz_1}; \\ u = u_1 - \iota v_1, & v = v_1 + \iota u_1, & w = w_1. \end{array}\right.$$

D'autre part, appelons N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 les forces N, T relatives aux nouveaux axes. Les formules (1), ou plus directement celles qu'établit M. Lamé au § 18 de ses *Leçons sur l'Élasticité*, donneront

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{lll} N'_1 = N_1 + 2\iota T_3, & N'_2 = N_2 - 2\iota T_3, & N'_3 = N_3; \\ T'_1 = T_1 - \iota T_2, & T'_2 = T_2 + \iota T_1, & T'_3 = T_3 - \iota(N_1 - N_2). \end{array}\right.$$

Si nous substituons dans ces formules, à N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, leurs expressions (2) en $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, puis, à ces dérivées, leurs valeurs en $\dfrac{d(u_1, v_1, w_1)}{d(x_1, y_1, z_1)}$, fournies par (α), les termes qui contiendront ι devront s'annuler quelles que soient ces dernières dérivées, puisque les formules des N, T doivent être les mêmes dans le nouveau système que dans le premier. On verra ainsi qu'il est nécessaire et suffisant, pour cela, que le coefficient H qui entre dans l'expression des N soit égal au coefficient de même nom dans celle des T. Les formules (2) sont donc nécessaires pour l'isotropie. Il serait d'ailleurs aisé de voir qu'elles sont suffisantes, ou que toute transformation d'axes rectangulaires en d'autres rectangulaires ne les modifiera pas.

3° Qu'un simple mouvement d'ensemble du fluide, c'est-à-dire une rotation élémentaire autour d'un axe quelconque, ne doit développer aucune force, et doit laisser par suite les N égaux à $-p$ et les T égaux à zéro. A cause de l'isotropie, on peut choisir l'axe de la rotation pour celui des z, ce qui, en appelant ω la vitesse angulaire, donne $u = -\omega y$,

$v = \omega x$, $w = 0$. Ces valeurs, portées dans (2), annulent bien T_1, T_2, T_3, et rendent N_1, N_2, N_3 égales à $-p$.

Il n'y a donc pas de nouvelle réduction à faire.

Ces trois remarques permettraient d'obtenir les termes N, T qui contiennent les $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ à des degrés supérieurs au premier. En me bornant aux termes du second degré, et désignant par A, B, C, D, E des coefficients arbitraires, j'ai trouvé

$$\begin{aligned}
N_1 = {} & A\left(\frac{dv^2}{dx^2} + \frac{dw^2}{dx^2} - \frac{du^2}{dy^2} - \frac{du^2}{dz^2}\right) + 2B\theta\frac{du}{dx} \\
& + 2C\left[2\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dz}\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\right] + D\theta^2 \\
& + E\left[\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)^2 \right. \\
& \left. \qquad - 4\left(\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 = {} & A\left(\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}\right) \\
& + B\theta\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + C\left[2\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}\right)\right. \\
& \left. \qquad + \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + \frac{du}{dy}\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}\right].
\end{aligned}$$

On en déduit N_2 et T_2, N_3 et T_3, par une ou par deux permutations circulaires effectuées sur : u, v, w; x, y, z.

Dans le cas du § II, ou du mouvement rectiligne d'un liquide homogene par filets parallèles à l'axe des x, on a

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0;$$

et ces formules se réduisent à

$$\left\{\begin{aligned}
N_1 &= (-A + 2C + E)\left(\frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right), \\
N_2 &= A\frac{du^2}{dy^2} + E\left(\frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right), \\
N_3 &= A\frac{du^2}{dz^2} + E\left(\frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right), \\
T_1 &= A\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0
\end{aligned}\right.$$

Ces nouveaux termes, portés dans les équations du mouvement, ne changent pas la première (6), mais augmentent respectivement les premiers nombres des deux autres de

$$-\left(E+\frac{A}{2}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}\right)-A\left(\Delta_2 u\right)\frac{du}{dy},$$

et de

$$-\left(E+\frac{A}{2}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}\right)-A\left(\Delta_2 u\right)\frac{du}{dz}.$$

En suivant la marche du § II, on trouvera, pour déterminer u, les mêmes équations indéfinies et les mêmes conditions relatives à la surface, que si l'on négligeait les termes du second degré. Mais il y aura de plus une condition d'intégrabilité

$$A\left(\frac{du}{dz}\frac{d^2u}{dy\,dt}-\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dz\,dt}\right)=0,$$

qui devra être vérifiée en tous les points du fluide. Elle l'est identiquement quand l'état permanent existe. Ainsi la considération des termes du second degré ne modifie en rien les résultats des §§ IV, V et VI.

Observons que ces termes n'ajoutent rien aux composantes tangentielles T_2, T_3, c'est-à-dire qu'ils ne donnent aucun frottement sur tout élément plan parallèle aux filets liquides.

Note II (après le § VI).

État permanent dans un tube à section triangulaire équilatérale. — En prenant pour axe des z une des trois hauteurs de la section, pour axe des y la base correspondante, et appelant $2c$ un côté, σ l'étendue de la section, on trouve :

$$V=\frac{3}{4}Lc^2\frac{z}{c\sqrt{3}}\left[\left(1-\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right];$$

d'où

$$\text{Dépense}=\frac{\sqrt{3}}{20}Lc^4=\frac{L\sigma^2}{20\sqrt{3}}=0,0289\,L\sigma^2.$$

ADDITION AU MÉMOIRE INTITULÉ :

THÉORIE NOUVELLE DES ONDES LUMINEUSES;

PAR M. BOUSSINESQ.

§ I. — *Puissance réfractive et pouvoir rotatoire des mélanges transparents.*

Dans ma *Théorie des ondes lumineuses* (t. XIII, p. 316), j'ai supposé que les déplacements u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables contenues dans un volume très-petit sont, pour toutes celles-ci, les mêmes fonctions de l'état de l'éther adjacent. Cela revient à admettre qu'elles se comportent toutes de la même manière. Or il est probable que, dans un mélange de plusieurs corps, ou même dans tout milieu non cristallisé, amorphe ou fluide, les molécules de différente nature ou orientées diversement sont aussi diversement agitées par la même onde lumineuse qui les atteint. Si le corps est toujours supposé transparent, les déplacements, que j'appellerai u'_1, v'_1, w'_1, de ces molécules, seront bien des fonctions linéaires des déplacements (u, v, w) de l'éther en un point quelconque très-voisin, et des dérivées des divers ordres de u, v, w par rapport à x, y, z; mais les coefficients de ces fonctions linéaires varieront d'une molécule à une autre.

L'action totale exercée par la matière pondérable, suivant l'axe des x, sur un volume élémentaire ϖ d'éther, s'obtiendra en multipliant la masse de chaque molécule pondérable contenue dans ce volume à l'époque t par l'accélération correspondante $\frac{d^2 u'_1}{dt^2}$, changée de signe, et en faisant la somme de tous les produits pareils. Cette somme vaut, sauf le signe, la masse totale pondérable $\rho_1 \varpi$ multipliée par ce que j'appellerai la moyenne des valeurs de $\frac{d^2 u'_1}{dt^2}$. Il suffira d'admettre que,

dans l'équation (2) du Mémoire, la première du mouvement, $\frac{d^2 u_1}{dt^2}$ représente cette valeur moyenne : u_1, déplacement moyen suivant les x des molécules pondérables, aura les mêmes expressions (3) avec $E = 0$, et (10), si le milieu est isotrope, et la même expression approchée (13), si le milieu est presque isotrope et presque symétrique. D'ailleurs, tous les déplacements étant très-petits, les variations des coefficients $A, B, C, D, Q, Q', \ldots, R, R', \ldots, S, S', \ldots, A(1+\alpha), A(1+\beta), A(1+\gamma)$, durant le mouvement, ne donneront que des termes négligeables du second ordre en u, v, w. Les résultats seront par conséquent les mêmes que s'il n'y avait qu'une seule espèce de molécules pondérables, vibrant toutes pareillement.

L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire sur la manière dont l'éther agite les molécules pondérables, consiste à admettre que son action sur chacune d'elles est la même que si les autres n'y étaient pas, et ne dépend, par exemple, la température étant supposée constante, que de la forme, du volume, de la densité et de l'orientation [*] de la molécule considérée. Alors chacun des coefficients $A, B, \ldots, A(1+\gamma)$ des formules (3), (10), (13), multiplié par $\rho_1 \varpi$, sera la somme des masses des molécules pondérables contenues dans l'élément ϖ de volume, respectivement multipliées par le coefficient analogue relatif à la molécule prise isolément. Comme il y aura généralement dans le milieu des molécules de plusieurs espèces, appelons $\rho', \rho'', \rho''', \ldots$ les densités partielles relatives aux diverses espèces. Considérons les molécules de la première : il est clair que le volume en contient, d'orientées dans un sens quelconque, un nombre proportionnel à $\rho'\varpi$. Donc les termes qui les concernent dans les sommes ci-dessus donneront un total proportionnel à $\rho'\varpi$. Il en sera de même des termes concernant les molécules des autres espèces, et, par suite, si $A', A'', \ldots, B', B'', \ldots, \ldots$ désignent des constantes, les coefficients seront donnés par des relations de la forme

$$A\rho_1 = A'\rho' + A''\rho'' + \ldots, \quad B\rho_1 = B'\rho' + B''\rho'' + \ldots, \ldots.$$

[*] Dans le cas où la chaleur serait constituée par des rotations rapides des molécules pondérables, l'influence de l'orientation serait remplacée par celle de ces rotations.

Soient ω_0 la vitesse de la lumière dans l'éther libre, ω sa vitesse dans le mélange considéré, supposé isotrope. D'après la formule sensiblement exacte $\omega = \sqrt{L}$, qui termine le § III, rapprochée des formules (7), on aura, en négligeant le terme en D,

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 = \frac{\rho_1 A}{\rho} = \frac{A'}{\rho}\rho' + \frac{A''}{\rho}\rho'' + \ldots .$$

Le premier nombre est dit la *puissance réfractive* du corps. Nous pourrons donc énoncer la loi suivante, que l'expérience a déjà fait découvrir chez les gaz :

Abstraction faite de la dispersion, la puissance réfractive d'un mélange transparent est la somme des puissances réfractives des divers corps qui composent le mélange, et chacune de celles-ci est elle-même proportionnelle à la densité du corps correspondant.

Si nous négligeons toujours le terme en D, l'angle ψ [(12)], dont tourne le plan de polarisation, sera proportionnel à $\rho_1 B$ [formules (10 *bis*)], où B est une fonction linéaire des coefficients R, R', ... des formules (10). Ces coefficients, multipliés ainsi par ρ_1, sont eux-mêmes des fonctions linéaires de ρ', ρ'', ... Par conséquent :

Abstraction faite de la dispersion, le pouvoir rotatoire d'un mélange transparent est la somme des pouvoirs rotatoires des corps qui le composent, et chacun de ces pouvoirs partiels est lui-même proportionnel à la densité du corps correspondant.

C'est la loi approchée généralement admise pour les dissolutions.

§ II. — *Essai sur la rotation du plan de polarisation par le magnétisme.*

Supposons qu'un aimant se termine à ses deux pôles par deux cylindres circulaires égaux, à axe commun, laissant entre eux un intervalle. L'expérience démontre qu'en adaptant à leurs bases des armatures d'une certaine forme, et en amenant, au moyen de vis, les deux pôles à une distance convenable l'un de l'autre, l'espace compris entre eux constituera un champ magnétique d'intensité constante, c'est-à-dire que l'action magnétique y sera partout sensiblement la même. Cela posé, plaçons dans cet espace un corps homogène transparent, isotrope-

symétrique, et proposons-nous d'obtenir les lois des ondes lumineuses qui le traverseront.

Prenons pour axe des z l'axe commun des deux cylindres, pour origine des coordonnées le milieu de la distance des pôles, et pour axes des x et des y deux droites perpendiculaires entre elles et à l'axe des z. Il est clair que le milieu transparent, primitivement homogène et isotrope-symétrique, mais actuellement soumis à des actions magnétiques constantes, sera resté homogène, et, de plus, semblablement constitué par rapport à tous les systèmes d'axes qu'on obtient en faisant tourner d'un angle quelconque autour de celui des z l'ensemble des deux autres. D'ailleurs, en observant que l'aimant peut être assimilé à une infinité de courants électriques disposés deux à deux symétriquement de part et d'autre du plan des xy, on verra que le milieu transparent est aussi constitué symétriquement par rapport à ce plan. Donc, si, comme nous l'avons admis jusqu'ici, les déplacements moyens u_1, v_1, w_1 des molécules pondérables ne sont fonctions linéaires que des déplacements u, v, w de l'éther au même point, et des dérivées en x, y, z de u, v, w, ces fonctions devront être telles ici, qu'elles ne changent pas quand on change à la fois z en $-z$, w en $-w$, w_1 en $-w_1$; ou encore x en $-x$, y en $-y$, u en $-u$, v en $-v$, u_1 en $-u_1$, v_1 en $-v_1$; ou enfin x en y, y en $-x$, u en v, v en $-u$, u_1 en v_1, v_1 en $-u_1$. En effet, ces transformations reviennent, la première à changer le sens de l'axe des z, la seconde et la troisième à faire tourner autour de cet axe, de 180 et de 90 degrés respectivement, le système des deux autres. En nous bornant aux termes qui contiennent u, v, w et leurs dérivées premières, il viendra ainsi des relations de la forme

$$(24)\qquad u_1 = Au - B_1 v, \quad v_1 = Av + B_1 u, \quad w_1 = A_1 w.$$

Il serait facile de voir qu'une rotation quelconque des axes des x et des y, autour de celui des z, les laisse invariables.

Ces valeurs de u_1, v_1, w_1, portées dans l'équation (2) et dans ses deux pareilles, donneront les trois équations du mouvement.

Dans le cas particulier d'ondes transversales perpendiculaires à l'axe des z, ces équations se réduisent à

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = (\rho + \rho_1 A)\frac{d^2 u}{dt^2} - \rho_1 B_1 \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad \mu \frac{d^2 v}{dz^2} = (\rho + \rho_1 A)\frac{d^2 v}{dt^2} + \rho_1 B_1 \frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Substituons-y les valeurs de u, v, w données par

$$(25) \qquad \frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right)\sqrt{-1}},$$

et nous trouverons

$$\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A = -\rho_1 B_1 \frac{N}{M} = \rho_1 B_1 \frac{M}{N},$$

d'où

$$N = \mp M\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\mu}{\omega^2} = \rho + \rho_1 A \pm \rho_1 B_1 \sqrt{-1}.$$

Si B_1 n'est pas nul, ω aura un terme imaginaire; par suite, l'exponentielle qui termine les relations (25) sera en partie réelle, les expressions des déplacements contiendront une exponentielle décroissante pour z grandissant, et le milieu éteindra la lumière. Puisqu'on le suppose transparent, il faut poser $B_1 = 0$, et il n'y a pas de rotation du plan de polarisation.

Le résultat serait le même si l'on étendait les expressions de u_1, v_1, w_1 aux dérivées d'ordre quelconque de u, v, w en x, y, z. Les mêmes considérations de symétrie par rapport au plan des xy et d'isotropie autour de l'axe des z montreraient que ces expressions, spécifiées pour le cas d'ondes perpendiculaires aux z, ne contiennent pas de dérivées d'ordre impair, et se réduisent respectivement, pour celle de l'ordre pair $2n$, à des termes de la forme

$$A_2 \frac{d^{2n}u}{dz^{2n}} - B_2 \frac{d^{2n}v}{dz^{2n}}, \quad A_2 \frac{d^{2n}v}{dz^{2n}} + B_2 \frac{d^{2n}u}{dz^{2n}}, \quad A_3 \frac{d^{2n}w}{dz^{2n}}.$$

Une méthode, employée au § IV, p. 326, permet de réduire à un seul, dans l'expression de chacun des déplacements u_1, v_1, w_1, la somme de tous les termes qui contiennent les dérivées de la même variable u, v, w; u_1, v_1, w_1 acquerront ainsi la forme (24), dans laquelle chaque coefficient sera une série ordonnée suivant les puissances négatives de $\tau^2\omega^2$. Si donc le milieu est transparent, il n'y aura pas de pouvoir rotatoire.

L'expérience prouve, au contraire, que le plan de polarisation de

la lumière est dévié en traversant le corps. Nous ne devons donc pas regarder comme suffisamment générale notre hypothèse, d'après laquelle les déplacements moyens u_1, v_1, w_1 de la matière pondérable en un point quelconque ne seraient fonctions que des déplacements de l'éther aux points environnants. Et, en effet, pour que l'état mécanique actuel de l'éther soit complétement déterminé dans un certain espace, on conçoit qu'il ne suffit pas de donner les positions actuelles des diverses molécules contenues dans cet espace, c'est-à-dire les valeurs qu'ont pour chacune u, v, w, mais qu'il faut encore connaître les vitesses actuelles $\frac{d(u, v, w)}{dt}$ de ces molécules, vitesses qui définissent leur mouvement. L'idée fondamentale de notre théorie étant que les déplacements u_1, v_1, w_1 dépendent de cet état mécanique, nous devons les regarder comme des fonctions linéaires, non-seulement de u, v, w et de leurs dérivées partielles en x, y, z, mais encore de $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ et de leurs dérivées en x, y, z. Lors de tout changement de coordonnées, ces vitesses se transformeront comme les déplacements correspondants. Par suite, dans le cas d'un milieu isotrope, et dans celui d'un milieu presque isotrope et presque symétrique, nous devrons ajouter aux seconds membres des relations (3) avec $E = 0$, (10) et (13), de nouvelles parties exactement pareilles à ces seconds membres, mais contenant partout $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ au lieu de u, v, w. On reconnaîtra aisément, comme nous venons de le faire pour un autre cas, que ces nouvelles parties ont des coefficients nuls si les corps sont transparents, c'est-à-dire si les ondes ne s'éteignent pas en les traversant sous une épaisseur finie. Donc, les expressions de u_1, v_1, w_1 resteront en définitive telles que je les ai données dans mon Mémoire, et il n'y aura rien à changer aux lois obtenues.

Mais, dans le cas actuel d'un milieu symétrique par rapport au plan des xy et isotrope autour de l'axe des z, les relations (24) montrent qu'en nous bornant aux dérivées premières, nous devrons respectivement ajouter, aux expressions (24) de u_1, v_1, w_1, des parties de la forme

$$\mathcal{A}\frac{du}{dt} - \mathcal{B}\frac{dv}{dt},\quad \mathcal{A}\frac{dv}{dt} + \mathcal{B}\frac{du}{dt},\quad \mathcal{A}_1\frac{dw}{dt}.$$

Annulons les coefficients B_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, incompatibles avec la transparence, et supposons, conformément à l'expérience, que notre milieu soit resté monoréfringent, ce qui revient à égaler A_1 à A; nous aurons

$$(26)\qquad u_1 = A u - \mathfrak{B}\frac{dv}{dt},\quad v_1 = A v + \mathfrak{B}\frac{du}{dt},\quad w_1 = A w.$$

Portons ces valeurs dans les trois équations du mouvement, puis substituons dans celles-ci, à u, v, w, leurs expressions données par l'intégrale simple

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega}\right)\sqrt{-1}},$$

qui correspond aux ondes planes dont la normale fait un angle i avec les z positifs. Il viendra

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda+\mu}{\omega^2}(M\sin i + P\cos i)\sin i + \left(\dfrac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right)M = -\dfrac{2\pi}{\tau}\mathfrak{B}N\sqrt{-1}, \\ \left(\dfrac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right)N = \dfrac{2\pi}{\tau}\mathfrak{B}M\sqrt{-1}, \\ \dfrac{\lambda+\mu}{\omega^2}(M\sin i + P\cos i)\cos i + \left(\dfrac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right)P = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations, respectivement multipliées par M, N, P, et ajoutées, donnent

$$\frac{\lambda+\mu}{\omega^2}(M\sin i + P\cos i)^2 + \left(\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right)(M^2 + N^2 + P^2) = 0;$$

ce qui change la troisième en

$$(28)\qquad N = \mp\sqrt{-1}\sqrt{M^2 + P^2 - \frac{P}{\cos i}(M\sin i + P\cos i)},$$

et, par suite, la seconde (27) en

$$(29)\quad \left(\frac{\mu}{\omega^2} - \rho - \rho_1 A\right)\sqrt{M^2 + P^2 - \frac{P}{\cos i}(M\sin i + P\cos i)} = \mp\frac{2\pi\mathfrak{B}}{\tau}M.$$

On éliminera le rapport $\frac{M}{P}$ entre (29) et la troisième (27), ce qui

donnera l'équation aux vitesses; puis on prendra M de la forme $Je^{\varphi\sqrt{-1}}$, J et φ étant deux constantes arbitraires réelles; la troisième relation (27) et la relation (28) donneront ensuite P et N; enfin on choisira pour les déplacements de l'éther les parties réelles de u, v, w.

Supposons ϑ très-petit, ainsi que cela a toujours lieu dans les expériences. Alors les équations (27) donnent : soit, avec N très-petit, des ondes quasi-longitudinales ayant même vitesse de propagation, sauf erreur du second ordre, que si ϑ était nul; soit, avec $M\sin i + P\cos i$ très-petit, des vibrations quasi-transversales.

Dans ce dernier cas, si nous posons

$$\sqrt{M^2+P^2} = Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}},$$

d'où, à très-peu près,

$$M = Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}}\cos i,\quad P = -Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}}\sin i,$$

les relations (28) et (29) deviendront sensiblement

$$(30)\quad N = \mp\sqrt{-1}\,Ie^{\frac{2\pi\varphi}{\tau}\sqrt{-1}},\quad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho+\rho_1 A}}\left(1 \pm \frac{\pi\vartheta\cos i}{\rho+\rho_1 A}\frac{1}{\tau}\right).$$

Appelons ω_1, ω_2 les deux valeurs de ω. Les parties réelles de u, v, w seront, avec la première, qui correspond aux signes supérieurs,

$$u = I\cos i\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega_1} + \varphi\right),$$

$$w = -I\sin i\cos\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega_1} + \varphi\right),$$

$$v = I\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega_1} + \varphi\right).$$

Chaque molécule d'éther décrira, dans le plan de l'onde, un cercle de rayon I, qui a pour équations

$$u^2 + v^2 + w^2 = I^2,\quad u\sin i + w\cos i = 0.$$

De plus, si nous supposons l'axe des y à droite de celui des x, relativement à un observateur qui aurait les pieds à l'origine et la tête du

côté des z positifs, ce cercle sera décrit de gauche à droite pour un autre observateur qui aurait les pieds à son centre et la tête du côté où va l'onde.

A la seconde racine ω_2 correspondront des vibrations circulaires pareilles, mais décrites de droite à gauche.

Lorsque $\mathfrak{B}$ est positif, ω_1 est $> \omega_2$ pour $i < 90°$, et $< \omega_2$ pour $i > 90°$. C'est le contraire quand $\mathfrak{B}$ est négatif.

En continuant comme au § III, p. 324, on verra que le milieu peut propager, dans chaque direction, un système d'ondes planes à vibrations rectilignes quasi-transversales, dont le plan de polarisation tourne, à mesure que l'onde avance, dans un sens qui est le même, par rapport à un observateur fixe, pour deux ondes de direction contraire. L'angle qui mesure cette rotation est proportionnel au chemin parcouru et au cosinus de l'angle que fait la normale à l'onde avec l'axe de l'aimant; il varie, de plus, à très-peu près, en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

Si l'on joint à ces lois celle-ci très-naturelle, que le petit coefficient $\mathfrak{B}$, dû à l'action magnétique, est sensiblement proportionnel à cette action, on aura toutes celles que l'expérience a données.

§ III. — *Ondes lumineuses dans les corps en mouvement.*

Concevons un corps transparent, animé de vitesses comparables à celles de la lumière, et telles que, pendant la durée d'un nombre fini de vibrations lumineuses, la vitesse de chaque portion du corps reste à peu près constante. Chaque molécule, à l'époque t, se trouvera en un certain point, que nous appellerons *sa position actuelle d'équilibre*. Comme les actions développées entre l'éther et la matière pondérable, lors de tout mouvement d'amplitude finie, sont extrêmement faibles, l'éther du corps ne sera presque pas entraîné avec lui, mais restera comparativement immobile.

Supposons actuellement qu'une onde lumineuse pénètre dans ce milieu, et proposons-nous d'obtenir les lois de sa propagation.

Nous appellerons : x, y, z les coordonnées, par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes, d'un point de l'espace occupé par le corps à l'époque t; u, v, w les déplacements à la même époque, comptés à

partir de la position actuelle d'équilibre, de la molécule d'éther dont cette position, sensiblement fixe, est actuellement en (x, y, z); u'_1, v'_1, w'_1 les déplacements pareils d'une molécule pondérable qui a sa position d'équilibre, au moment t, en (x, y, z); enfin V la vitesse dont se trouve animée la position d'équilibre de la molécule considérée, et V_1, V_2, V_3 les composantes de V, qui seront des fonctions continues de x, y, z, t

D'après notre manière de concevoir la transparence d'un corps, u'_1, v'_1, w'_1 dépendront des déplacements et des vitesses vibratoires de l'éther environnant, et seront les mêmes fonctions de $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ et de leurs dérivées par rapport à x, y, z, que si toutes les positions d'équilibre étaient rendues immobiles aux points qu'elles occupent actuellement. Or, avec ces positions actuelles d'équilibre, l'éther du corps doit être, à fort peu près, constitué comme l'éther libre, car la lenteur relative de ses mouvements lui permet d'être sans cesse en équilibre de tension et de densité avec l'éther libre qui l'environne. Si donc nous désignons par $\sum$ une somme de termes pareils à celui qui suivra ce signe, et respectivement égaux à des coefficients a, multipliés par $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$, ou par leurs dérivées de divers ordres en x, y, z, nous pourrons poser

$$u'_1 = \sum au,$$

et regarder les coefficients a comme variables peut-être, pour la même molécule, avec son orientation ou avec d'autres éléments, mais non avec la vitesse V de sa position d'équilibre. Pendant la durée d'une vibration lumineuse, l'orientation, ou, à sa place, tout autre élément capable de modifier ces coefficients, change à peine, et, par suite, les variations du déplacement u'_1 de la même molécule durant un instant très-court seront les mêmes que si les coefficients étaient constants.

La portion de la vitesse suivant les x de la même molécule, qui correspond au mouvement vibratoire, s'obtiendra en prenant le rapport à dt de l'accroissement que reçoit u'_1 quand on y fait croître t de dt, x de $V_1 dt$, y de $V_2 dt$, z de $V_3 dt$. Cette vitesse peut s'écrire symbo-

liquement

$$\sum a\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)u.$$

La portion de l'accélération suivant les x de la même molécule, qui correspond au mouvement vibratoire, sera de même, en observant que V_1, V_2, V_3 ne varient pas d'une manière appréciable durant une vibration,

$$\sum a\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2 u.$$

La partie correspondante de la force motrice exercée suivant les x sur la matière pondérable contenue dans le volume ϖ, s'obtiendra en multipliant la masse de chaque molécule qui en fait partie par la portion pareille de son accélération, et en ajoutant les produits. Le résultat aura la forme

$$\rho_1\varpi\sum a_1\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2 u.$$

On peut regarder les coefficients a_1 comme constants dans une étendue assez petite et durant un temps très-court. Ils le seraient même dans de plus larges limites, si le corps ne cessait pas d'être homogène et isotrope, ou si, étant homogène, mais d'une constitution d'ailleurs quelconque, il n'était soumis qu'à un mouvement de translation incapable de changer son orientation.

Appelons u_1, v_1, w_1 les déplacements moyens, dont le premier est $\sum a_1 u$, des molécules pondérables qui, à l'époque t, ont leurs positions d'équilibre autour de (x, y, z) : ces déplacements moyens seront donnés : dans le cas d'un milieu isotrope, par les formules (3) avec $E = 0$ et (10); dans celui d'un milieu presque isotrope et presque symétrique rapporté à ses axes, par les formules (13); enfin, dans le cas d'un milieu monoréfringent, symétrique par rapport au plan des xy et isotrope autour de l'axe des z, par les formules (26).

La portion, correspondante au mouvement vibratoire, de la force motrice exercée suivant les x sur la matière pondérable contenue dans le volume ϖ, vaudra

$$\rho_1\varpi\left(\frac{d}{dt}+V_1\frac{d}{dx}+V_2\frac{d}{dy}+V_3\frac{d}{dz}\right)^2 u_1.$$

La partie pareille de l'action qui meut l'éther du même volume est, à très-peu près, $\rho\varpi \frac{d^2 u}{dt^2}$, puisque les vitesses analogues à V_1, V_2, V_3 sont comme nulles pour l'éther.

La force motrice qui est appliquée suivant les x à la matière du volume ϖ, en sus de celle qui agirait seule si les vibrations étudiées n'existaient pas, vaut donc en tout

$$(31) \qquad \rho\varpi \frac{d^2 u}{dt^2} + \rho_1 \varpi \left(\frac{d}{dt} + V_1 \frac{d}{dx} + V_2 \frac{d}{dy} + V_3 \frac{d}{dz}\right)^2 u_1.$$

Elle est égale à la somme des forces qui, émanées de points extérieurs et produites par le mouvement vibratoire, agissent suivant les x sur la même matière. Ces forces sont de trois sortes. Il y a :

1° Les actions élastiques que les petites vibrations considérées développent dans l'éther : celui-ci, avec les positions actuelles d'équilibre de ses molécules, est, à fort peu près, constitué comme l'éther libre, et les déplacements (u, v, w) donnent, suivant les x, une résultante élastique très-peu différente de

$$(32) \qquad \varpi \left[(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u\right];$$

2° Les forces pareilles de la matière pondérable : nous avons vu au § I qu'elles sont insensibles;

3° Les actions exercées, sur la matière pondérable qui appartient au volume ϖ et qui se trouve près de sa surface, par l'éther extérieur adjacent, et celles qui le sont sur l'éther superficiel du même volume par la matière pondérable extérieure adjacente. Ces actions, dues aux différences de vitesse entre les molécules des deux espèces de matière, sont très-petites par rapport à celles de même nature qui sont produites entre toute la matière pondérable du volume ϖ et tout l'éther de ce volume. Comme celles-ci ne sont que de l'ordre de ϖ, les premières sont négligeables.

Nous pouvons donc égaler les expressions (31) et (32) : ce qui donne, pour la première équation du mouvement, à laquelle les deux autres seraient pareilles,

$$(33) \quad (\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta_2 u = \rho \frac{d^2 u}{dt^2} + \rho_1 \left(\frac{d}{dt} + V_1 \frac{d}{dx} + V_2 \frac{d}{dy} + V_3 \frac{d}{dz}\right)^2 u_1.$$

Dans le cas d'un système d'ondes planes, de période τ, de vitesse ω', et perpendiculaires à la direction (m, n, p), les déplacements suivant les axes, à l'époque t, de la molécule d'éther dont la position d'équilibre est en (x, y, z) à cette époque, sont les parties réelles des expressions de u, v, w données par des intégrales simples de la forme

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = e^{\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{\omega'}\right)\sqrt{-1}}.$$

u_1, v_1, w_1, fonctions linéaires de u, v, w, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, et de leurs dérivées partielles en x, y, z, deviendront, ainsi que leurs dérivées, égales à des constantes multipliées par la même exponentielle. On aura donc

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{m}{\omega'}\frac{du_1}{dt}, \quad \frac{du_1}{dy} = -\frac{n}{\omega'}\frac{du_1}{dt}, \quad \frac{du_1}{dz} = -\frac{p}{\omega'}\frac{du_1}{dt}, \quad \frac{d^2u_1}{dx^2} = \frac{m^2}{\omega'^2}\frac{d^2u_1}{dt}, \ldots,$$

et la première équation du mouvement deviendra

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx} + \mu\Delta_2 u = \rho\frac{d^2u}{dt^2} + \rho_1\left(1 - \frac{mV_1 + nV_2 + pV_3}{\omega'}\right)^2\frac{d^2u_1}{dt^2}.$$

L'expression $mV_1 + nV_2 + pV_3$ est égale à la composante, suivant la normale à l'onde, de la vitesse du corps : nous la désignerons par V'.

Les équations des ondes planes se déduiront, par conséquent, de celles qu'on aurait dans le cas $V = 0$, par les simples changements de ω en ω' et de ρ_1 en $\rho_1\left(1 - \frac{V'}{\omega'}\right)^2$.

Lorsque V' est assez petit par rapport à la vitesse ω des ondes de même direction dans le corps supposé en repos, ω' diffère peu de ω, et l'on peut, sauf erreur négligeable, remplacer $\frac{V'}{\omega'}$ par $\frac{V'}{\omega}$. Si, de plus, le corps est un de ceux étudiés aux §§ III, IV, V, VI et au paragraphe précédent, on pourra négliger les termes qui seront à la fois de l'ordre du facteur $\frac{V'}{\omega}$, et de celui du pouvoir dispersif, ou biréfringent, ou rotatoire : on remplacera par exemple, dans ce facteur, ω par sa valeur

approchée constante, qui est $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho+\rho_1 A}}$ pour les ondes longitudinales, et $\sqrt{\frac{\mu}{\rho+\rho_1 A}}$ pour les ondes transversales.

Ainsi les ondes se propageront comme si le corps était en repos et avait pour densité, au lieu de ρ_1,

$$(34)\qquad \text{soit}\quad \rho_1\left(1 - V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\lambda+2\mu}}\right)^2,\quad \text{soit}\quad \rho_1\left(1 - V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\mu}}\right)^2.$$

Les pouvoirs dispersif, biréfringent, rotatoire ne seront modifiés que très-peu. De plus, le carré de la vitesse ω^2 se composant de l'un des deux termes

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho+\rho_1 A}\quad \text{ou}\quad \frac{\mu}{\rho+\rho_1 A},$$

plus de termes très-petits, si l'on y change ρ_1 en l'expression (34) correspondante, le terme principal aura seul une variation du premier ordre. Cette variation vaudra respectivement

$$\frac{\lambda+2\mu}{(\rho+\rho_1 A)^2} A\, 2\rho_1 V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\lambda+2\mu}} = 2\omega\frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A} V',$$

et

$$\frac{\mu}{(\rho+\rho_1 A)^2} A\, 2\rho_1 V'\sqrt{\frac{\rho+\rho_1 A}{\mu}} = 2\omega\frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A} V'.$$

On aura donc

$$\omega'^2 = \omega^2 + 2\omega\frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A} V',\quad \text{ou}\quad \omega' = \omega + \frac{\rho_1 A}{\rho+\rho_1 A} V'.$$

Appelons $\mathfrak{N}$ l'indice de réfraction du corps, indice dont le carré est égal, sauf des termes très-petits, à $\frac{\rho+\rho_1 A}{\rho}$, et cette relation deviendra

$$(35)\qquad \omega' = \omega + \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{N}^2}\right) V'.$$

C'est la formule connue, que Fresnel a déduite de plusieurs hypothèses, et que confirment diverses expériences, dues notamment à Arago et à M. Fizeau.

FIN DU TOME TREIZIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

